

Міністерство освіти і науки України
Амвросіївський індустріальний технікум

Д О В І Д К О В И Й М А Т Е Р І А Л
З В И Щ О Ї М А Т Е М А Т И К И

для студентів технікуму

Довідковий матеріал з вищої математики. Навчальний посібник

Підготувала Кожем'як Т.О.—викладач Амвросіївського індустріального технікуму

Посібник містить довідковий матеріал до курсу "Вища математика" в обсязі діючої програми для вищих закладів освіти першого рівня акредитації

Призначається для студентів технікуму денної форми навчання

Рецензент:

Колесникова А.І.—викладач Амвросіївського індустріального технікуму

Розглянуто та схвалено на засіданні циклової комісії природничо-наукових дисциплін

МАТРИЦІ

<p><i>Матриця – таблиця</i></p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	<p><i>Діагональна</i></p> $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $\Delta = a \cdot b \cdot c$	<p><i>Одинична</i></p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = 1$	<p><i>Вектор-рядок</i></p> $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ <p><i>Вектор-стовпець</i></p> $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$
	<p><i>Трикутна</i></p> $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$	<p><i>Симетрична</i></p> $\begin{pmatrix} a & d & m \\ d & b & k \\ m & k & c \end{pmatrix}$	<p><i>Обернена</i></p> $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}$
<p><i>Дії над матрицями</i></p>	<p><i>Додавання матриць</i></p> $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$	<p><i>Множення матриці на число:</i></p> $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$	<p><i>Транспонування матриць:</i></p> $c_{ij} \rightarrow c_{ji}$
	<p><i>Множення матриць</i></p> $c_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$	<p>Для квадратних матриць другого порядку:</p> $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$	
	<p><i>Піднесення матриці до степеню</i></p> $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$	<p>Добуток AB існує, якщо кількість стовпців A дорівнює кількості рядків B.</p> <p>$AB \neq BA$! Якщо $AB = BA$, то матриці називають комутативними</p>	

ВИЗНАЧНИКИ

<p><i>Визначник—число</i></p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$	<p><i>Обчислення визначників</i></p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}' & a_{22}' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}' & a_{32}' \end{vmatrix}$
<p><i>Міnor M_{ij}</i></p> <p>Визначник, який залишився після викреслювання i-го рядка та j-го стовпця</p> $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$	<p><i>Алгебраїчне доповнення A_{ij} Міnor</i>, взятий разом зі знаком: "+", якщо $i + j$ – парне число "–", якщо $i + j$ – непарне</p> $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ $A_{22} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$
<p><i>Формула розкладу визначника за елементами першого рядка:</i></p> $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \cdot$ <p><i>Теорема:</i> Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення</p>	

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

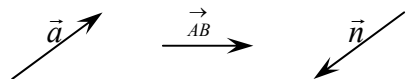
<p><i>Система рівнянь</i></p> $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$	<p>$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ — основна матриця системи;</p> <p>$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ — розширена матриця системи</p>	<p>$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ — матриці-стовпці, складені з невідомих та з вільних членів відповідно</p>
<p><i>Формули Крамера</i></p>	$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ <p>Δ — основний визначник системи; $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ — допоміжні визначники, утворені із основного визначника шляхом заміни його k-го стовпця стовпцем вільних членів</p> $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ <p>— якщо $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок; — якщо $\Delta = 0$, $\Delta_k \neq 0$, тоді система несумісна, тобто не має розв'язків; — якщо $\Delta = \Delta_k = 0$, тоді система є невизначеною, тобто має безліч розв'язків.</p>	
<p><i>Матричний</i></p>	<p>Систему записуємо у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де A — основна матриця системи, X і B — це матриці-стовпці, складені з невідомих і вільних членів відповідно. Рішення системи шукаємо у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$, дотримуючись такого порядку дій:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) записуємо основну матрицю системи A і знаходимо її визначник A. 2) якщо $A = 0$, то система розв'язку не має; 3) якщо $A \neq 0$, тоді знаходимо обернену матрицю A^{-1} до матриці A; 4) множимо обернену матрицю A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів; 5) одержаний стовпець X є розв'язком системи 	
<p><i>Гаусса</i></p>	<p>Зрівняти коефіцієнти і відняти рівняння</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>1) в першому і другому рядках; в першому і третьому рядках</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ </div> <div style="text-align: center;"> <p>2) в другому і третьому рядках</p> $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ m_1y + n_1z = k_1 \\ m_2y + n_2z = k_2 \end{cases}$ </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 20px;"> <div style="width: 45%;"> <p>Виконуючи "обернений хід", знайти усі невідомі з допомогою послідовних підстановок.</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: right;"> $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \Rightarrow x \\ m_1y + n_1z = k_1 \Rightarrow y \uparrow \\ p_1z = q_1 \Rightarrow z \uparrow \end{cases}$ </div> </div>	

ВЕКТОРИ І КООРДИНАТИ

Вектор – направлений відрізок $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{m}, \vec{AK})$

Геометричний зміст

Характеристики: 1) Довжина $|\vec{a}|$
2) Напрямок

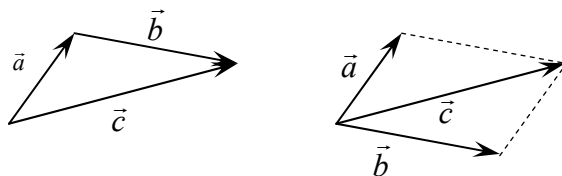


Властивості:

- 1) $\vec{a} = \vec{b}$, якщо співпадають довжина і напрям;
- 2) $-\vec{a}$, якщо напрям протилежний напрямку вектора \vec{a} ;
- 3) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо вони лежать на паралельних прямих, такі вектори колінеарні ($\vec{a} = \lambda \vec{b}$);
- 4) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо їх напрямки складають кут 90°

Дії над векторами:

- 1) Додавання— $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



правило трикутника правило паралелограма

- 2) Віднімання $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

- 3) $k \cdot \vec{a} = \begin{cases} \text{розтягнення в } k \text{ раз при } k > 1 \\ \text{стискання в } k \text{ раз при } 0 < k < 1 \\ -|k| \cdot \vec{a} \text{ при } k < 0 \end{cases}$

- 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ — скалярний добуток
тут $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, φ — кут між векторами
(якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

- 5) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ — векторний добуток, якщо
 $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$;

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — права трійка

(якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$)

$|\vec{a} \times \vec{b}| = S$ — площа паралелограма

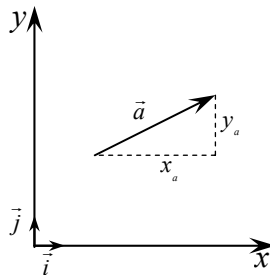
- 6) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ — мішаний добуток

$[(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})] = V$ — об'єм паралелепіпеда

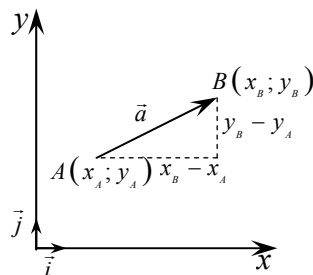
(якщо $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарні, то $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$)

Алгебраїчний зміст

Характеристика: впорядкована пара дійсних чисел (координати)



$$\vec{a} = (x_a; y_a)$$



$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Властивості:

- 1) $\vec{a} = \vec{b}$, якщо $x_a = x_b, y_a = y_b$
- 2) $\vec{a} = -\vec{a}$, якщо $x_a = -x_a, y_a = -y_a$
- 3) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, якщо $\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \lambda$
- 4) $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $x_a x_b + y_a y_b = 0$

Дії над векторами:

- 1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b)$
- 2) $k\vec{a} = (kx_a; ky_a)$
- 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$
- 4) $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$
- 5) $\cos \alpha = \frac{x_a}{|\vec{a}|}$; $\cos \beta = \frac{y_a}{|\vec{a}|}$ — напрямні косинуси

- 6) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

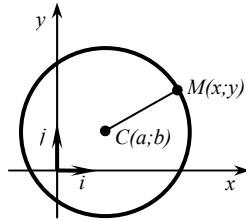
$$7) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

$$8) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

РІВНЯННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Найпростіші задачі векторної алгебри та аналітичної геометрії			
Початок вектора		$A(x_a; y_a)$	
Кінець вектора		$B(x_b; y_b)$	
Координати вектора		$\overrightarrow{AB}(x_b - x_a; y_b - y_a)$	
Довжина вектора (відстань між точками)		$ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$	
Скалярний добуток векторів		$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	
Координати середини відрізка		$x_c = \frac{x_B + x_A}{2}; y_c = \frac{y_B + y_A}{2}$	
Види рівнянь на площині			
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ Нормальне рівняння прямої	$(x; y)$ — координати довільної точки M прямої; $(x_0; y_0)$ — координати точки M_0 , через яку проходить пряма; $(A; B)$ — координати вектора \vec{n} , перпендикулярного до прямої		
$Ax + By + C = 0$ Загальне рівняння прямої	$(x; y)$ — координати довільної точки $M \in l$; \vec{n} — нормальний вектор прямої l ; $\vec{n} \perp l$, $\vec{n} = (A, B)$; Для побудови треба знайти дві точки при $x = 0$ та $y = 0$		
$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ Канонічне рівняння прямої	$M_0(x_0; y_0) \in l$; $M(x; y)$ — довільна точка l \vec{s} — напрямний вектор прямої l ; $\vec{S} = (l; m)$; $\vec{S} \parallel l$		
$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ — фіксовані точки прямої; $M(x; y)$ — довільна точка прямої		
$y = kx + b$ Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$M(x; y)$ — довільна точка прямої; $k = \operatorname{tg} \alpha$ — кутовий коефіцієнт; α — кут нахилу прямої до осі Ox b — величина відрізка, який відтинає пряма на осі Oy		
Взаємне розміщення прямих на площині			
	Кут між прямими	Умови паралельності прямих	Умови перпендикулярності прямих
$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{ a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 }{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$
$l_1: \frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1}$ $l_2: \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2}$	$\cos \varphi = \frac{ l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 }{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$	$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$	$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$
$l_1; y = k_1x + b_1$ $l_2; y = k_2x + b_2$	$\operatorname{tg} \varphi = \left \frac{k_1 - k_2}{k_1 \cdot k_2 + 1} \right $	$k_1 = k_2$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Відстань від точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямої $l: ax + by + c = 0$:		$ \overrightarrow{M_0M_1} = \frac{ ax_1 + b_1y + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ



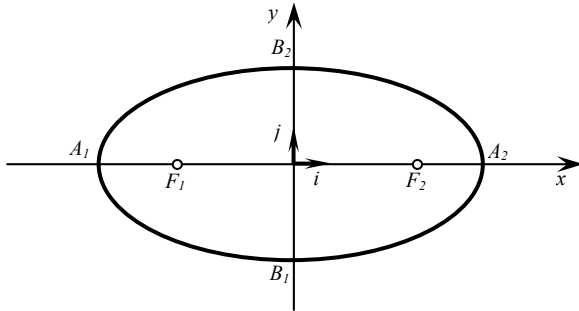
Колом називаються всі точки площини, рівновіддалені від даної точки (центра)

Характеристики:

$C(a; b)$ – центр кола; R – радіус

Загальне рівняння кола: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Канонічне рівняння кола (з центром в початку координат): $x^2 + y^2 = R^2$



Еліпсом називаються всі точки площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини (фокусів) є величина стала, більша за відстань між фокусами.

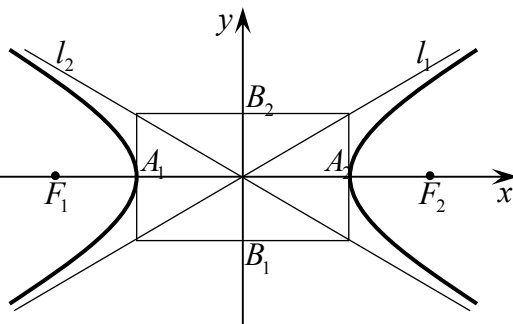
Характеристики:

Фокуси: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$

Осі: велика— $2a$, мала— $2b$

Ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a}$

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Гіперболою називаються всі точки площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох даних точок площини (фокусів) є величина стала, менша за відстань між фокусами.

Характеристики:

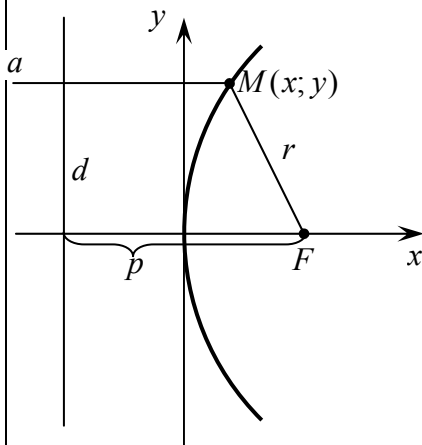
Фокуси: $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$

Осі: дійсна— $2a$; уявна— $2b$

Ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a}$

Асимптоти: $y = \frac{b}{a}x$; $y = -\frac{b}{a}x$;

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



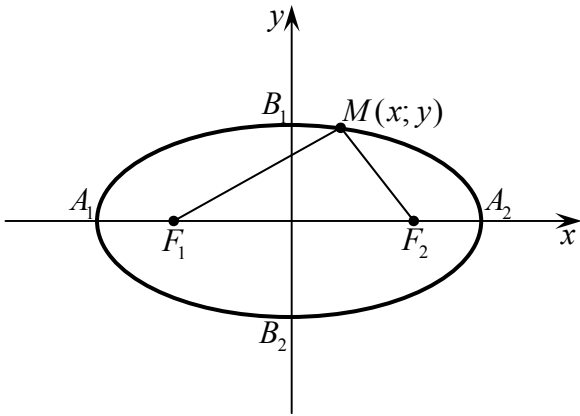
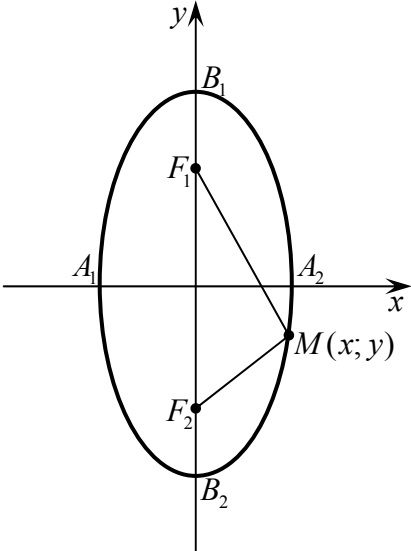
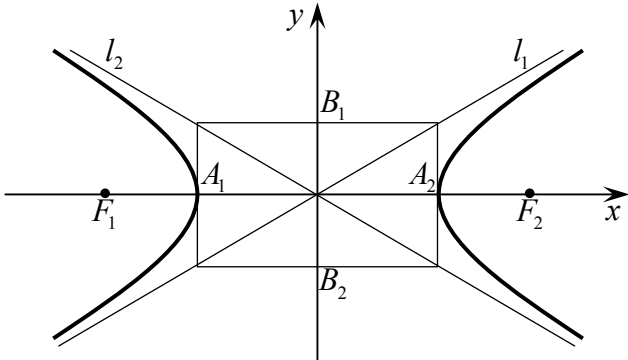
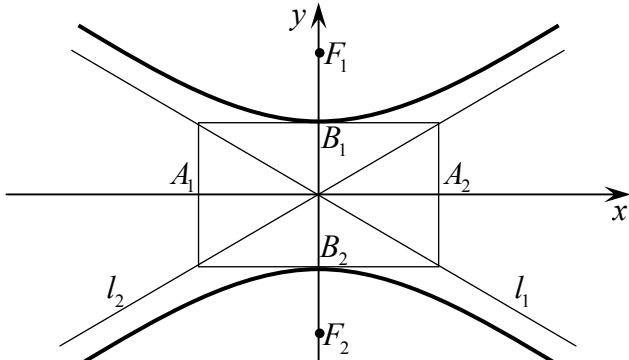
Параболою називаються всі точки площини, для кожної з яких відстань до даної точки (фокуса) дорівнює відстані до даної прямої (директриси), яка не проходить через фокус.

Характеристики:

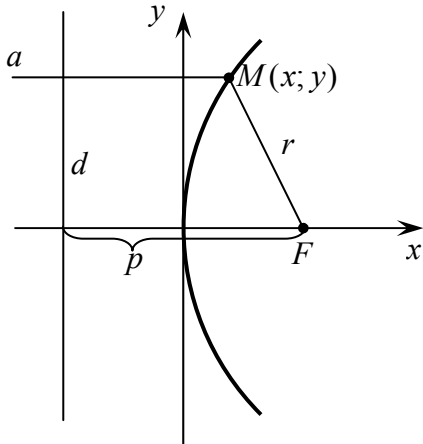
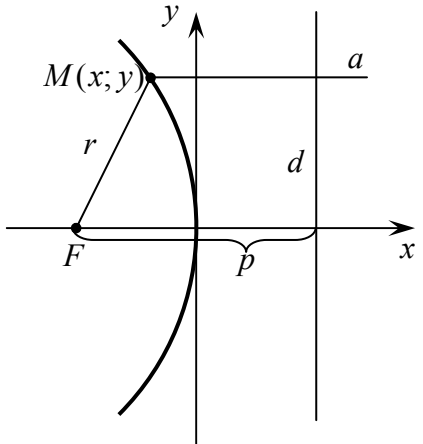
Фокус: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$; Директриса $x = -\frac{p}{2}$

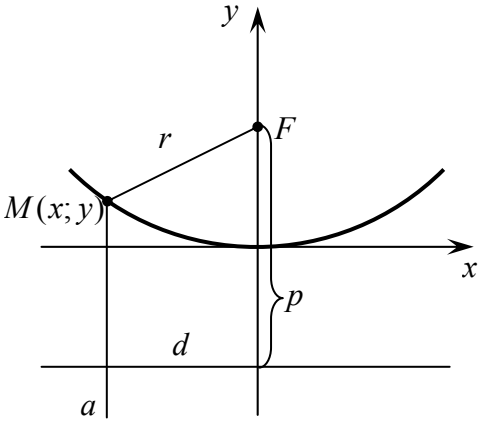
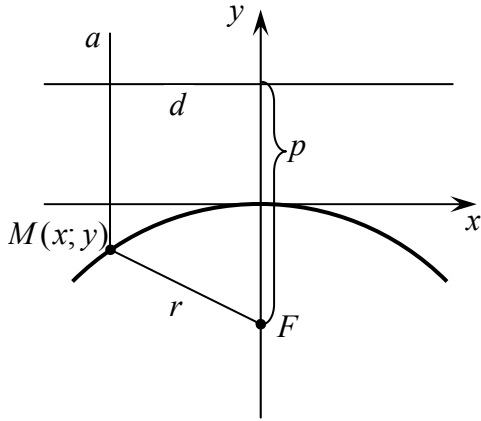
Рівняння параболи $y^2 = 2px$

ОСНОВНІ ВИПАДКИ РОЗМІЩЕННЯ ЕЛІПСА ТА ГІПЕРБОЛИ

	
Фокуси знаходяться на осі Ox	Фокуси знаходяться на осі Oy
Координати фокусів $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$	Координати фокусів $F_1(0; c)$, $F_2(0; -c)$
Співвідношення між a і b : $a > b$	Співвідношення між a і b : $a < b$
Велика вісь $ A_1A_2 = 2a$; Мала вісь $ B_1B_2 = 2b$	Велика вісь $ B_1B_2 = 2b$; Мала вісь $ A_1A_2 = 2a$
Фокусна відстань $ F_1F_2 = 2c$	Фокусна відстань $ F_1F_2 = 2c$
Ексцентриситет $\varepsilon = c : a$	Ексцентриситет $\varepsilon = c : b$
Співвідношення між a , b і c : $a^2 - b^2 = c^2$	Співвідношення між a , b і c : $b^2 - a^2 = c^2$
Рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	
Фокуси знаходяться на осі Ox	Фокуси знаходяться на осі Oy
Координати фокусів $F_1(c, 0)$ $F_2(-c, 0)$	Координати фокусів $F_1(0, c)$ $F_2(0, -c)$
Дійсна вісь $ A_1A_2 = 2a$; Уявна вісь $ B_1B_2 = 2b$	Дійсна вісь $ B_1B_2 = 2b$; Уявна вісь $ A_1A_2 = 2a$
Фокусна відстань $ F_1F_2 = 2c$	Фокусна відстань $ F_1F_2 = 2c$
Ексцентриситет $\varepsilon = c : a$	Ексцентриситет $\varepsilon = c : b$
Асимптоти $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$	Асимптоти $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$
Співвідношення між a , b і c : $c^2 - a^2 = b^2$	Співвідношення між a , b і c : $c^2 - b^2 = a^2$
Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Рівняння $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

ОСНОВНІ ВИПАДКИ РОЗМІЩЕННЯ ПАРАБОЛИ

	
Фокус знаходиться на додатній півосі Ox	Фокус знаходиться на від'ємній півосі Ox
Координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	Координати фокуса $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$	Рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$
Рівняння параболи $y^2 = 2px$	Рівняння параболи $y^2 = -2px$

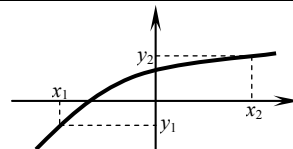
	
Фокус знаходиться на додатній півосі Oy	Фокус знаходиться на від'ємній півосі Oy
Координати фокуса $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	Координати фокуса $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси $y = -\frac{p}{2}$	Рівняння директриси $y = \frac{p}{2}$
Рівняння параболи $x^2 = 2py$	Рівняння параболи $x^2 = -2py$

ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

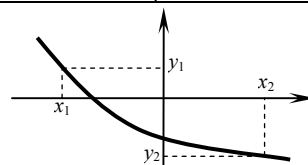
Функцією називається відповідність між значеннями x множини X та елементами y множини Y так, що кожному значенню множини X відповідає одне і лише одне значення множини Y . Областю визначення функції $[D(x)]$ називають множину значень змінної x , для яких існують значення функції y .

Областю значень функції $[E(x)]$ називають сукупність всіх значень y , які відповідають значенням змінної x із області визначення цієї функції

1. Функція *зростаюча*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

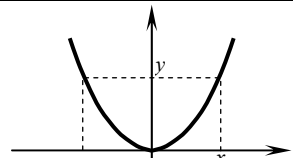


2. Функція *спадна*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$



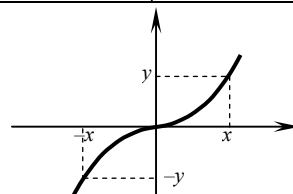
3. Функція *парна*, якщо зміна знаку аргументу не викликає зміни функції. $f(-x) = f(x)$

Графік симетричний відносно осі OY .

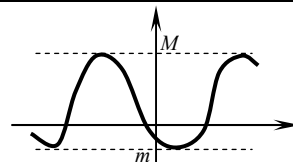


4. Функція *непарна*, якщо зміна знаку аргументу викликає лише зміну знаку функції. $f(-x) = -f(x)$

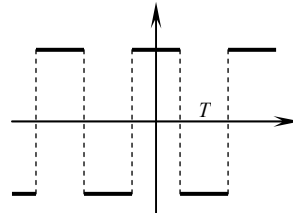
Графік симетричний відносно початку координат.



5. Функція $f(x)$ *обмежена*, якщо існують числа M, m , такі, що для всіх $x \in D(f)$ $m \leq f(x) \leq M$



6. Функція називається *періодичною*, якщо існує таке число T ($T \neq 0, T \in \mathbb{R}$), що $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$, $x \in I$



Види функцій

Лінійною називається функція виду $y = ax + b$, де $a, b \in \mathbb{R}$,

Степеневою називається функція $y = x^n$, де n — будь-яка дійсна стала

Показниковою називається функція $y = a^x$, якщо $a > 0, a \neq 1$ ($y = e^x$)

Логарифмічною називається функція $y = \log_a x$, якщо $a > 0, a \neq 1$ ($y = \ln x; y = \lg x$)

Тригонометричні функції: $y = \sin x; y = \cos x; y = \operatorname{tg} x; y = \operatorname{ctg} x$

Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x; y = \arccos x; y = \operatorname{arctg} x; y = \operatorname{arcctg} x$

Ціла раціональна функція: $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ (многочлен)

Дробово-раціональна функція: $y = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$

Ірраціональна функція: $y = \sqrt[n]{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}$

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Визначення границі	
1. Число B називають <i>границею функції</i> $y = f(x)$ в точці $x = a$, якщо для всіх значень x достатньо близьких до a і відмінних від a значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа B	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$
Односторонні границі: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = B_1$ —ліва, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = B_2$ —права	
2. Число A називається <i>границею функції</i> $y = f(x)$ на нескінченності, якщо для всіх достатньо великих по модулю значень аргументу x відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
Властивості границь	
1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	4) $\lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), C = const$
Нескінченно великі (н.в) і нескінченно малі (н.м) функції	
Функція $f(x)$ нескінченно мала при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$	
Функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	
Якщо при $x \rightarrow a$ функція $y = \alpha(x)$ нескінченно мала, то функція $y = f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ при $x \rightarrow a$ нескінченно велика	
Якщо при $x \rightarrow a$ функція $y = f(x)$ нескінченно велика, то функція $y = \alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$, при $x \rightarrow a$ нескінченно мала	
Чудові границі	
1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
	3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad e = 2,718281\dots$
Неперервність функції	
Функція $f(x)$ <i>неперервна в точці</i> x_0 , якщо:	Властивості:
1) $f(x) = f(x_0)$	1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^m = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^m$
2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$	2) $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
3) $f(x_0) = A$	3) $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)},$
Функція <i>неперервна на проміжку</i> , якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку	якщо $a \in D(R(x))$
Точки розриву функцій	
Ліквідовний розрив:	$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$
Розрив першого роду:	$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$
Розрив другого роду:	не існує або нескінченна $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ

Похідна функції	
<p>Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0—це границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу при $\Delta x \rightarrow 0$</p> <p>Позначають:</p> $y'(x_0), y', f'(x_0), f'_x, \frac{dy}{dx}$	<p>Механічний зміст: миттєва швидкість руху—похідна від координати по часу $v = S'(t)$</p> <p>Геометричний зміст: похідна—це тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в заданій точці</p> $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ <p>Рівняння дотичної $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$</p>
Диференціал функції	
<p>Диференціал незалежної змінної x—це приріст цієї змінної Δx, $dx = \Delta x$</p> <p>Диференціал функції—це головна частина приросту функції, $dy = f'(x_0)\Delta x$</p> <p>Диференціал функції дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної</p> $dy = f'(x)dx$	<p>Застосування до наближених обчислень</p> <p>Основна формула в наближених обчисленнях:</p> $y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x) \cdot \Delta x$ <p>Формули для обчислення значень степеневих функцій:</p> $(x + \Delta x)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x;$ $\sqrt[k]{x + \Delta x} = \sqrt[k]{x} + \frac{\sqrt[k]{x}}{k} \cdot \Delta x$
Правила диференціювання	
<p>1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$</p> <p>2. $(uv)' = u'v + uv'$</p>	<p>3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$</p> <p>4. $C' = 0$</p> <p>5. $(Cu)' = Cu'$</p> <p>6. $y' = f'(u) \cdot u'(x)$, якщо $y = f(u(x))$</p>
Таблиця похідних	
<p>1. $(x') = 1$</p> <p>2. $(x^n)' = nx^{n-1}$; $(u^n)'_x = nu^{n-1}u'_x$</p> <p>3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\sqrt{u})'_x = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}$</p> <p>4. $(\sin x)' = \cos x$; $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$</p> <p>5. $(\cos x)' = -\sin x$; $(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$</p> <p>6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{tg} u)'_x = \frac{u'_x}{\cos^2 u}$</p> <p>7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; $(\operatorname{ctg} u)'_x = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}$</p> <p>8. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(a^u)'_x = a^u \ln a \cdot u'_x$, $a > 0$, $a \neq 1$</p>	<p>9. $(e^x)' = e^x$; $(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x$</p> <p>10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$</p> <p>11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$</p> <p>12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arcsin u)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$</p> <p>13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos u)'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$</p> <p>14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arctg} u)'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}$</p> <p>15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} u)'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}$</p>
Застосування похідної до дослідження функції	
<p>Достатні умови зростання і спадання функції: $y' > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$; $y' < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$</p> <p>Інтервали, в яких функція зростає або спадає—інтервали монотонності функції</p> <p>Необхідна умова існування екстремуму: x_0—критична точка $[x_0 \in D(y), y' = 0, y' - \text{не існує}]$</p> <p>Достатні умови: \max — y' змінює знак з "+" на "-"; \min — y' змінює знак з "-" на "+"</p> <p>Найбільшого $\left(\max_{[a;b]} f(x)\right)$ та найменшого $\left(\min_{[a;b]} f(x)\right)$ значення функція досягає в точках екстремуму або на одному з кінців відрізка $[a;b]$</p>	

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Визначення	
$z = f(x; y)$ — функція двох змінних x і y , якщо: <ol style="list-style-type: none"> 1) задана множина D упорядкованих пар чисел $(x; y)$; $D(f)$ — область визначення; 2) кожній парі чисел $(x; y)$ із цієї множини за певним законом відповідає число z. $E(f)$ — множина значень z .	
Частинні похідні функції двох змінних	
першого порядку	другого порядку
z'_x частинна похідна по аргументу x , $(y = \text{const})$	$(z'_x)'_x = z''_{x^2}$ — частинна похідна по змінній x
z'_y частинна похідна по аргументу y , $(x = \text{const})$	$(z'_x)'_y = z''_{xy}$
	$(z'_y)'_x = z''_{yx}$
	$(z'_y)'_y = z''_{y^2}$ частинна похідна по змінній y
$z''_{xy} = z''_{yx}$ — мішані частинні похідні	
Правила і формули диференціювання такі ж, як і для функції однієї змінної	
Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y) = x^2y - 3y^2 + 5x$	
$z'_x = (x^2y - 3y^2x)'_x = 2xy - 3y^2$ $y = \text{const}$	$z''_{x^2} = (2xy - 3y^2)'_x = 2y$ $y = \text{const}$
$z'_y = (x^2y - 3y^2x)'_y = x^2 - 6xy$ $x = \text{const}$	$z''_{xy} = (2xy - 3y^2)'_y = 2x - 6y$ $x = \text{const}$
$z''_{y^2} = (x^2 - 6xy)'_y = -6x$ $x = \text{const}$	$z''_{yx} = (x^2 - 6xy)'_x = 2x - 6y$ $y = \text{const}$
Повний диференціал функції z дорівнює сумі її частинних диференціалів: $dz = z'_x dx + z'_y dy$	
Похідна за напрямом вектора $\vec{l}(l_x; l_y)$: $z'_l = z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta$, де $\cos \alpha = \frac{l_x}{ \vec{l} }$; $\cos \beta = \frac{l_y}{ \vec{l} }$ — напрямні косинуси вектора \vec{l}	
Градієнт функції — $\text{grad } z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j}$ — вектор, за напрямом якого похідна z'_l має найбільше значення.	
Найбільше значення похідної за напрямом вектора \vec{l} $(z'_l)_{\max} = \text{grad } z = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y}$	
Екстремуми функції двох змінних	
Необхідна умова існування екстремуму: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$	
Достатні умови існування екстремуму: якщо в околі критичної точки $M_0(x_0; y_0)$ існують $A = z''_{xx}(M_0)$; $B = z''_{xy}(M_0)$; $C = z''_{yy}(M_0)$, то функція $z = f(x; y)$	
має \max , якщо $AC - B^2 > 0$ та $A < 0$; має \min , якщо $AC - B^2 > 0$ та $A > 0$	
не має екстремуму, якщо $AC - B^2 < 0$	
Якщо $AC - B^2 = 0$, тоді екстремум в точці M_0 може існувати, а може не існувати. Щоб зробити висновок щодо існування екстремуму, треба дослідити поведінку функції в околі критичної точки. Якщо при переході через критичну точку функція зберігає знак "+", то критична точка є точкою максимуму, якщо зберігає знак "-", то критична точка є точкою мінімуму, якщо знак не зберігається, то екстремуму немає.	

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

$F'(x) = f(x)$	$F(x)$ —первісна функції $f(x)$
$\int f(x)dx = F(x) + C$	Невизначений інтеграл—це сукупність усіх первісних функції $f(x)$ $f(x)dx$ —підінтегральний вираз; $f(x)$ —підінтегральна функція, x —змінна інтегрування
Властивості невизначеного інтегралу	<ol style="list-style-type: none"> $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$, де $K = const$ $\int (ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$
Таблиця інтегралів	
1 $\int dx = x + C$;	$\int kdx = kx + C$
2 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$)	9 $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$
3 $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	10 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
4 $\int e^x dx = e^x + C$;	11 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$	12 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$
5 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;	13 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln a} + C$	14 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C$
6 $\int \sin x dx = -\cos x + C$;	15 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$
$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$	
7 $\int \cos x dx = \sin x + C$	
8 $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$;	$\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos x + C$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$	Визначений інтеграл дорівнює приросту довільної первісної функції на проміжку $[a; b]$. Тут a і b —нижня та верхня межі інтегрування
$S = \int_a^b f(x)dx$	Геометричний зміст—площа криволінійної трапеції
Властивості визначеного інтегралу	$1 \int_a^a f(x)dx = 0$; $2 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $3 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, a < c < b$ <div style="text-align: right;">+ властивості невизначеного інтегралу</div>
Наближені методи обчислення визначеного інтегралу	
Формули "лівих" та "правих" прямокутників	$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$; $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$
Формула трапецій	$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right)$
Формула Сімпсона	$\int_a^b ydx = \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots y_{n-1}))$

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

<i>Метод безпосереднього інтегрування</i>	<p><i>Порядок інтегрування:</i></p> <p>1 При необхідності виконати алгебраїчні перетворення підінтегральної функції.</p> <p>2 Скористатись основними властивостями невизначеного інтеграла.</p> <p>3 Скористатись таблицею інтегралів</p>	$\int (x^2 + 3)^2 dx = \int (x^4 + 6x^2 + 9) dx^{(1)} =$ $= \int x^4 dx + \int 6x^2 dx + \int 9 dx^{(2)}$ $= \int x^4 dx + 6 \int x^2 dx + 9 \int dx^{(2)}$ $= \frac{x^5}{5} + 6 \frac{x^3}{3} + 9x + C^{(3)} = \frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x + C$
<i>Метод підстановки</i>	<p><i>Характерна особливість:</i> під інтегралом є добуток і складна функція</p> <p><i>Суть методу</i>—введення нової змінної інтегрування. Новою змінною замінюють частину підінтегральної функції, яка дає складність і при диференціюванні якої отримують ту частину, що залишилась незаміненою.</p> <p>В результаті підстановки одержаний інтеграл повинен бути простішим. Після використання таблиці інтегралів слід повернутися до попередньої змінної</p>	$\int x^2 \sqrt{x^3 + 4} dx = \left \begin{array}{l} x^3 + 4 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right = \int \frac{1}{3} \sqrt{t} dt =$ $= \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + C =$ $= \frac{2}{9} \sqrt{t^3} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 4)^3} + C$ <p>(Під інтегралом є добуток—$x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 4}$ та складна функція—$\sqrt{x^3 + 4}$. "Складність" дає підкореневий вираз—$x^3 + 4$).</p>
<i>Інтегрування частинами</i>	<p><i>Характерна особливість:</i> під інтегралом є добуток функцій, причому хоча б одна з функцій не є степеневою.</p> <p><i>Формула інтегрування частинами:</i></p> $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ <p>В інтегралах $\int P(x) \cdot \sin x dx$, $\int P(x) \cdot \cos x dx$, $\int P(x) \cdot e^{kx} dx$ обирають $u = P(x)$.</p> <p>В інтегралах $\int P(x) \cdot \arctg x dx$, $\int P(x) \cdot \arcsin x dx$, $\int P(x) \cdot \ln x dx$ обирають $dv = P(x) \cdot dx$</p>	$\int x \cdot e^x dx = \left \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right =$ $= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$ $\int \arcsin x dx = \left \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = \int dx = x \end{array} \right =$ $= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

<i>Безпосереднє інтегрування</i>	Формула Ньютона-Лейбніца	$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b = F(b) - F(a)$
<i>Метод підстановки</i>	Щоб не повертатись до попередньої змінної, слід знайти нові границі інтегрування	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin x dx}{(1 - \cos x)^2} \left \begin{array}{ll} 1 - \cos x = u & u_{\pi} = 1 - \cos \pi = 2 \\ du = \sin x dx & u_{\frac{\pi}{2}} = 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right =$ $= \int_1^2 \frac{2 du}{u^2} = 2 \int_1^2 u^{-2} du = -\frac{2}{u} \Big _1^2 = -\left(\frac{2}{2} - \frac{2}{1}\right) = 1$
<i>Інтегрування частинами</i>	Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла	$\int_a^b u dv = uv \Big _a^b - \int_a^b v du$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Основні визначення		
<p>Диференціальне рівняння—$f\left(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}\right) = 0$</p> <p>Порядок диференціального рівняння—порядок найстаршої похідної</p> <p>Загальний розв'язок—функція від x, що залежить від C_1, C_2, \dots, C_n (n—порядок рівняння) і задовольняє заданому диференціальному рівнянню</p> <p>Частинний розв'язок—загальний розв'язок з фіксованими значеннями C_1, C_2, \dots, C_n</p> <p>Задача Коші—диференціальне рівняння + початкові умови</p> <p>Розв'язок задачі Коші—знаходження частинного розв'язку при заданих початкових умовах</p>		
Диференціальні рівняння першого порядку		
Найпростіші: $\frac{dy}{dx} = f(x)$	1 Привести до виду $dy = f(x)dx$ та інтегрувати 2 Знайти загальний та частинний розв'язки	
З відокремлюваними змінними: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$; $Q(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$	1 Розділити змінні $\frac{f_1(x)dx}{\varphi_1(x)} + \frac{\varphi_2(y)dy}{f_2(y)} = 0$ та інтегрувати 2 Знайти загальний та частинний розв'язки	
Лінійні: $y' + f(x) \cdot y = g(x)$	1 Заміна $y = u \cdot v$, $dy = u'v + uv'$ 2 Одержали рівняння $u'v + u(v' + f(x) \cdot v) = g(x)$ 3 Припустити: $v' + f(x) \cdot v = 0$, знайти v 4 Розв'язати рівняння $u'v = g(x)$ і знайти u : $u = u(x) + C$ 5 Записати загальний розв'язок $y = (u(x) + C) \cdot v$ 6 Знайти частинний розв'язок	
Однорідні: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де P, Q —однорідні функції одного виміру	1 Заміна $y = zx$, $dy = zdx + xdz$, 2 Привести подібні 3 Розділити змінні та інтегрувати 4 Зробити обернену заміну $z = \frac{y}{x}$. 5 Знайти загальний та частинний розв'язки	
Диференціальні рівняння другого порядку		
Найпростіші: $y'' = f(x)$	1 Інтегрувати двічі 2 Знайти загальний розв'язок $F(x, C_1, C_2) = 0$ 3 Знайти частинний розв'язок	
Лінійні однорідні з постійними коефіцієнтами: $y'' + py' + qy = 0$	1 Скласти характеристичне рівняння і знайти його корені: $k^2 + pk + q = 0$	
	2 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння	
	Корені характеристичного рівняння	Розв'язок диференціального рівняння
	$D > 0, (k_1 \neq k_2)$	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
	$D < 0, (k_1 = k_2)$	$y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$
	$D = 0, k_1 = a + bi, k_2 = a - bi$	$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$
3. Знайти частинний розв'язок		

ЧИСЛОВІ РЯДИ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ — ряд; числа a_1, a_2, a_3, \dots — члени ряду; $a_n = f(n)$ — загальний член ряду

S_1, S_2, \dots, S_n — часткові суми ряду: $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; \dots S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (S — сума збіжного ряду); $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

Необхідна умова збіжності: Щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався, необхідно щоб $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Властивості дій з рядами

- $k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n, k = \text{const};$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$

Ознаки збіжності рядів з додатними членами:

Ознака порівняння: Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$. Тоді ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно

Ознака Д'Аламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, ($\rho < 1$ — збіжний, $\rho > 1$ — розбіжний, $\rho = 1$ — невідомо)

Інтегральна ознака Коші (при $\rho = 1$): якщо $y = f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігаються або розбігаються одночасно

Ознаки збіжності знакозмінних рядів:

Знакозмінний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$

Достатня умова Лейбніца: якщо послідовність a_n ($n=1, 2, 3, \dots$) монотонно спадає і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ збігається і його сума не перевищує a_1 .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ абсолютно збіжний, якщо збіжні одночасно ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} a_n|$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ умовно збіжний, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} a_n|$ — розбігається

Ознака Д'Аламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, ($\rho < 1$ — абсолютно збіжний, $\rho > 1$ — розбіжний)

Приклади числових рядів

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ — ряд Лейбніца — збігається умовно.

$\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1} = a + a q + a q^2 + \dots + a q^n + \dots$ — ряд геометричної прогресії збігається, якщо $|q| < 1$ і розбігається, якщо $|q| \geq 1$.

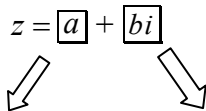
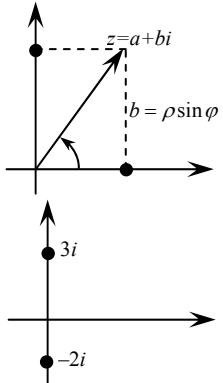
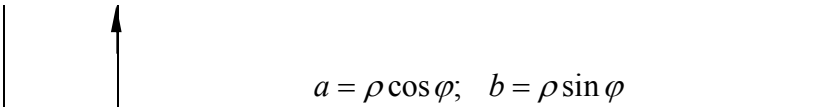
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$ — узагальнений гармонічний ряд збіжний при $k > 1$ та розбіжний при $k \leq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ — гармонічний ряд. Ряд розбігається.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ — функціональний ряд; $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), — функції <i>Область збіжності</i> — множина значень x , в яких ряд збігається. Сума ряду — $S(x)$	
Степеневі ряди	
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \dots + a_n(x-b)^n + \dots;$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$	x — незалежна змінна, a_0, a_1, \dots, a_n — коефіцієнти ряду, b — фіксоване дійсне число.
<i>Теорема Абеля</i> — якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x , таких що $ x < x_0 $. Якщо при $x = x_1$, ряд розбіжний, то він розбіжний всюди, де $ x > x_1 $.	
Радіус збіжності $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_n}{a_{n+1}} \right $ — число, таке, що при $ x < R$ ряд збігається, а при $ x > R$ — розбігається. Область збіжності — $(-R; +R)$ Якщо $R > 0$ — радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, то в області $ x < R$ степеневий ряд можна інтегрувати і диференціювати скільки завгодно разів.	
Розклад елементарних функцій у степеневі ряди	
<i>Ряд Маклорена</i> $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$	
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ збігається при всіх значеннях x ($e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = 2,7182818\dots$)	
$\sin x = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$	Непарна функція $y = \sin x$ містить у своєму розкладі лише непарні степені x .
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$	Парна функція $y = \cos x$ містить у своєму розкладі лише парні степені x .
$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$	<i>Біноміальний розклад Ньютона</i>
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in (-1; 1]$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$
Ряд Фур'є (Тригонометричний ряд)	
Для функції $y = f(x)$ заданої на відрізку $[-\pi; \pi]$: $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$	
$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ — коефіцієнти Фур'є	
Ряд Фур'є: непарної функції $f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, де $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$ ($n = 1, 2, \dots$),	
парної — $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, де $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$, ($n = 1, 2, \dots$)	

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

N — натуральні числа — $\{1, 2, 3, \dots\}; +; \times; a^n$		Уявна одиниця	
Z — цілі числа — $\{\dots -1, 0, 1, \dots\}; +; -; \times; a^n$		$i = \sqrt{-1}$	
Q — раціональні числа — $\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N \quad +; -; \times; \div; a^{\pm}$		$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$	
J — ірраціональні числа — $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \pi; e \quad +; -; \times; \div; a^{\pm}$		$i^3 = -1 \cdot i = -i$	
$Q \cup J = R$ — дійсні числа — нема $\sqrt{- a }$		$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	
		$i^m = i^{4k+n} = i^{4k} \cdot i^n = (i^4)^k \cdot i^n = i^n$	
Алгебраїчна форма комплексного числа $z = a + bi$			
Загальний вигляд:		Дії з комплексними числами	
$z = \boxed{a} + \boxed{bi}$		$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di,$	
		$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + i(b \pm d)$	
дійсна частина		$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$	
уявна частина		$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$	
		Спряжені комплексні числа: $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$	
		$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$	
Геометрична інтерпретація комплексного числа			
$a + bi$ — комплексне число			
(a, b) — координати точки, вектора на площині			
Довжина вектора — модуль комплексного числа — $\rho = z = \sqrt{a^2 + b^2}$			
Напрямок вектора — аргумент комплексного числа — φ			
$\varphi = \begin{cases} \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 1 \text{ чв}; \\ \pi - \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 2 \text{ чв}; \\ \pi + \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 3 \text{ чв}; \\ 2\pi - \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 4 \text{ чв} \end{cases}$			
Тригонометрична форма комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$			
Дії з комплексними числами		$z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$	
$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$		$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$	
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$		$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$	
Показникова форма комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$			
Дії з комплексними числами		$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$	
$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$		$z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}; \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, (n-1))$	
Перехід від однієї форми комплексного числа до іншої			
Алгебраїчна форма		Тригонометрична, показникова форма	
$a + bi \quad (a; b)$		$\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi} \quad (\rho; \varphi)$	
			
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \begin{cases} \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 1 \text{ чв} \\ \pi - \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 2 \text{ чв} \\ \pi + \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 3 \text{ чв} \\ 2\pi - \arctg \left \frac{b}{a} \right , & z \in 4 \text{ чв} \end{cases}$			

СПОГАДИ ЗІ ШКОЛИ

Арифметичні дії з раціональними числами			Рівняння															
Множення, ділення $a \cdot b = c; \quad a : b = c$			лінійні	квадратні														
<table><tr><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr><tr><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr></table>	a	b	c	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	+	$ax + b = 0$ $ax = -b$ $x = -\frac{b}{a}$		$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ $D = b^2 - 4ac \quad D \geq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
a	b	c																
+	+	+																
+	-	-																
-	+	-																
-	-	+																
Додавання, віднімання 1. Сума двох від'ємних чисел від'ємна 2. Сума двох чисел з різними знаками має знак числа з більшим модулем. Щоб знайти модуль суми, треба відняти модулі доданків 3. Дію віднімання заміняють додаванням з протилежним числом																		
Функції			Формули скороченого множення															
1 Степенева— $y = x^n$ 2 Показникова— $y = a^x; \quad y = e^x$ 3 Логарифмічна— $y = \log_a x, \quad y = \ln x, \quad y = \lg x,$ 4 Тригонометричні— $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$ 5 Обернені тригонометричні— $y = \arcsin x,$ $y = \arccos x, \quad y = \arctg x, \quad y = \operatorname{arccctg} x$			$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ <i>Квадратний тричлен</i> $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$															
Логарифми		Властивості степенів		Тригонометричні тотожності														
$a^c = b \Leftrightarrow \log_a b = c$ a —основа; $\ln b; \lg b$ $\log m + \log n = \log mn$ $\log m - \log n = \log \frac{m}{n}$ $k \log m = \log m^k$ $a = \ln e^a, \quad a^{\log_a x} = x,$ $\log 1 = 0, \quad \ln e = 1$		$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$ $(a^n)^m = a^{nm}; \quad \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}; \quad a^0 = 1$ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}; \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$		$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$														
Значення тригонометричних функцій																		
α	0, 360°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	345°		
	0, 2 π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$		
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		