МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Амвросіївський індустріальний технікум

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

студентів спеціальності 5.050111 "Бухгалтерський облік"

з дисципліни "Вища математика"

Навчально-методичний комплекс

2008

Вища математика. Організація самостійної роботи студентів спеціальності 5.050111 "Бухгалтерський облік" з дисципліни "Вища математика"

Укладач

Кожем'як Т.О., викладач вищої категорії.

Рецензент

Колесникова А.І, викладач вищої категорії.

Навчально-методичний комплекс розглянутий і схвалений цикловою комісією природничонаукових дисциплін технікуму (протокол № 2 від 01 жовтня 2008 р.) та Методичною радою технікуму (протокол № 3 від 5 листопада 2008 р.)

ЗМІСТ

ФОРМИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Суспільство ХХІ століття називають "суспільством знань", бо саме знання визначають і матеріальне, і духовне життя. Самі знання постійно примножуються і людина витрачає все більше часу на набуття знань.

Змінюються також вимоги до навчальних закладів: молодший спеціаліст повинен бути не переобтяженим теоретичними знаннями, а відкритим до сприйняття інновацій; мати гнучкий розум, здатний постійно опановувати нову інформацію.

Впровадження в навчально-виховний процес інноваційних технологій дозволяє зробити його більш демократичним та гуманним по відношенню до студента, розкрити його здібності, допомогти подолати особисту невпевненість, навчити раціонально організовувати свою діяльність та адекватно оцінювати свої досягнення.

Я схиляюсь до проведення занять за модульно-рейтинговою системою, тому що вважаю, що ця система сприяє більш повному розкриттю здібностей студента. Її суть в специфічній системі проведення навчальних занять; в оцінці навчальних досягнень студентів за рейтинговою системою та домінуванні в навчальній діяльності студентів самостійної роботи.

В Положенні про організацію навчального процесу в вищих закладах освіти визначено, що самостійна робота студентів є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов’язкових навчальних занять. Якщо розуміти самостійну роботу студентів над вивченням курсу вищої математики як активну пізнавальну самостійну діяльність, то вона здійснюється рівно як при роботі над теоретичним матеріалом так і при розв’язанні задач і виконанні вправ.

Самостійною можна вважати також і активну розумову роботу, в яку викладач може утягнути студентів в ході бесіди, особливо в тих випадках, коли студенти підводяться до самостійного "відкриття" нових знань. Як особливий вид фронтальної, групової і індивідуальної навчальної діяльності студентів, самостійна робота характеризується великою активністю протікання пізнавальних процесів і може здійснюватись як в аудиторії так і поза аудиторією та служить засобом підвищення ефективності процесу навчання і підготовки студентів до самостійного поповнення своїх знань.

Самостійна навчальна робота студентів підпорядковується правилам і нормам педагогічної технології, тому слід організувати навчальний процес, пізнавальну діяльність студентів в найбільш доцільному порядку і з найбільш ефективним і оптимальним використанням навчально-методичних і дидактичних ресурсів.

Слід пам’ятати, що *метою самостійної роботи* є:

– поглиблення і уточнення знань, здобутих під час аудиторних занять;
– вироблення конкретних практичних навичок;
– розвиток здібностей, необхідних в подальшій діяльності;

– систематизація знань із дисципліни та розуміння її місця у системі фахових знань.

Самостійна робота повинна сформувати цілісну систему з навчальної дисципліни, допомогти в розвитку логічного мислення, навчити працювати з додатковими джерелами інформації.

Студент, знаходячись в організованій викладачем системі самостійної роботи, повинен планувати свої дії, тобто обирати для себе мету; визначати програми і методи їх досягнення; організовувати і об’єднувати свої ресурси для вирішення поставлених проблем; управляти своєю діяльністю, здійснювати самоконтроль з наступним корегуванням своїх дій.

Планування починається з ознайомлення з методичними рекомендаціями до вивчення теми, постановки мети та завдань навчальної діяльності, раціонального розподілу часу, організації своєї діяльності за рекомендованим викладачем алгоритмом.

Виконання полягає в опануванні навчального матеріалу.

Контроль передбачає вдосконалення вмінь та навичок студента проводити самоконтроль, самоаналіз та самокорекцію результатів власної навчальної діяльності.

Корекція полягає в оцінюванні викладачем звітних завдань самостійної роботи, оцінюванні якості самостійної діяльності студента.

Я пропоную вашій увазі свою систему організації самостійної навчальної роботи студентів Мною використовуються такі форми організації самостійної навчальної діяльності студентів:

Характер самостійної навчальної роботи студентів		Дидактичні ресурси організації самостійної роботи студентів
за місцем реалізації	за формою реалізації	
Поза аудиторією	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу і поглиблення знань	Навчальна і допоміжна література, конспект лекцій викладача, методичні рекомендації, перелік питань, завдань і проблем для самостійної роботи
Поза аудиторією	Підготовка до виконання практичних робіт	Письмові завдання для самостійного розв’язування, домашні практичні роботи, навчальна література, опорні конспекти
Поза аудиторією	Виконання обов’язкових домашніх завдань	Завдання, методичні вказівки з наведеними при необхідності алгоритмами вирішення типових задач, навчальна, довідкова література.
В аудиторії	Контрольно-залікові заняття	Завдання, довідкова література, опорні конспекти, ЕОТ
В аудиторії	Виконання практичних робіт	Плани проведення практичних робіт, довідкова література

Така систематизація самостійної роботи студентів за місцем її здійснення і за формою організації дозволяє мені більш чітко і дидактично обґрунтовано визначитись з технологією її організації.

Технологія організації самостійної навчальної діяльності студентів, яка передбачає їх роботу поза аудиторією по засвоєнню поточного навчального матеріалу ускладнюється насамперед станом навчально-методичного забезпечення навчального процесу, наявністю навчальної літератури в бібліотеці, низькими технічними і матеріальними можливостями технікуму. Для підтримання належного рівня технології організації такої роботи мною розроблено конспект лекцій з вищої математики та навчально-методичний комплекс самостійної роботи студентів, які надаються студентам для користування.

Використовую інноваційну форму організації самостійної роботи студентів—силибус. *Силибус*—це програма дій студента над матеріалом, що виноситься на самостійне опрацювання. Він є складовою частиною навчально-методичного забезпечення дисципліни "Вища математика". Його мета – до початку занять пояснити студентам структуру та наповнення самостійної роботи, очікування викладача. Студенти отримують орієнтовний алгоритм дій, дотримуючись якого вони успішно оволодіють матеріалом, що виноситься на самостійне вивчення і успішно складуть підсумковий контроль.

Важливим елементом самостійної діяльності студента є підготовка до практичних занять. Зробити самостійну підготовку до практичних занять активним елементом педагогічного процесу можна за умови формування чітких проблемних, цікавих і захоплюючих питань і завдань і їх професійної спрямованості. Мною зібрана достатня кількість завдань, які мають професійну спрямованість, але ці завдання на даному етапі я пропоную як додатковий матеріал більш підготовленим студентам.

Ефективною є така форма організації самостійної навчальної діяльності студентів, як обов’язкові домашні завдання. Їх зміст дуже близький до змісту завдань, які я пропоную на контрольно-залікових заняттях. Це і форма контролю, і форма активізації самостійної пізнавальної діяльності. Щоб забезпечити високий рівень активізації самостійної пізнавальної діяльності, особливу увагу приділяю рівню підготовленості завдань. Це стосується їх змісту, форми і обсягів. За змістом обов’язкові домашні завдання повинні максимально охоплювати навчальний матеріал, який виноситься на вивчення навчальною програмою дисципліни. Обов’язково визначаю найбільш важливі теми, за якими студент повинен засвоїти і продемонструвати вміння застосовувати одержані знання як в стандартних так і нових ситуаціях. Обираючи вправи для домашніх завдань враховую, що:

– завдання має максимально носити цілісний характер, тобто не складатись з окремих розрізнених частин, а мати більш-менш чітку логічну послідовність і взаємозв’язок;

– завдання повинні бути доступними для вирішення студентом;

– обсяги завдань повинні враховувати зайнятість студентів одночасним вивченням декількох навчальних дисциплін;

– технологія самостійної домашньої роботи повинна бути основою для формування у студентів практичних навичок з різноманітними інформаційними джерелами.

Далі щодо деяких *форм самостійної роботи, які використовую в аудиторії* при проведенні традиційних форм організації навчального процесу.

Щоб стимулювати пізнавальну діяльність студентів і їх самостійну роботу при проведенні *практичних занять*, формую зміст практичних робіт так, щоб тема і зміст роботи відповідали основній навчальній меті відповідної теми чи розділу і забезпечували формування творчих здібностей студента.

До форм самостійної роботи, яка виконується в аудиторії, відносяться *контрольно-залікові заняття*. Технологія їх проведення досить відома: на початку заняття я додатково інформую студентів про зміст завдань, порядок і терміни їх виконання, потім студенти повністю самостійно виконують завдання. Після завершення відведеного часу збираю виконані завдання для перевірки.

Головним в підготовці таких занять вважаю структуру завдань. Їх зміст визначається метою вивчення тем і розділів дисципліни. Обираю ті питання, які передбачають оволодіння ними на рівні теоретичних знань і ті, які студент повинен опанувати на рівні способів діяльності і творчої роботи. Знання досить добре і об’єктивно контролюються за допомогою тестів, володіння способами діяльності—розв’язанням задач, вправ. Таким чином, визначаю 7 – 12 завдань, які максимально рівномірно охоплюють весь обсяг навчального матеріалу. При такому підході можливо позбутися випадковості в оцінці навчальних досягнень студента.

Дидактично оправданим вважаю надання студентам ще на початку вивчення розділу дисципліни орієнтовного переліку можливих питань і завдань для контрольно-залікових занять. Додаткове опрацювання студентами примірних завдань стимулює їх самостійну роботу і надає впевненості викладачу щодо самостійної роботи студентів в аудиторії над виконанням завдання.

ПРОГРАМА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
студентів спеціальності 5.050111 "Бухгалтерський облік"

Модуль 1 "ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ"

Тема 1 "Еквівалентні матриці"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати, які операції є елементарними перетвореннями матриць, вміти виконувати елементарні перетворення

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, написання конспекту, самостійне виконання вправ

Література для опрацювання: І.І. Литвин, с.259

Форма контролю: Фронтальне опитування, усні вправи

Тема 2 "Властивості визначників"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати основні властивості визначників. Вміти використовувати властивості при обчислюванні визначників.

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, написання конспекту, самостійне виконання вправ

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 262 – 263

Форма контролю: Математичний диктант

Обов’язкове домашнє завдання № 1 "Розв’язування систем лінійних рівнянь"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти використовувати при розв’язуванні систем методи: Крамера, Гаусса, матричний

Форма самостійної роботи студентів: Розв’язування ОДЗ №1.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов’язкових домашніх завдань та їх аналіз

Тема 3 "Взаємне розміщення прямих на площині"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати умови паралельності і перпендикулярності прямих, заданих різними способами. Вміти визначати кут між пересічними прямими.

Форма самостійної роботи студентів: Письмові відповіді на питання, розв’язування вправ

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 306 – 311;
В.М.Лейфура, стор. 129 – 132

Форма контролю: Тестовий контроль знань

Тема 4 "Пряма лінія у просторі"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти складати загальні, канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі

Форма самостійної роботи студентів: Запис у зошиті всіх видів рівнянь прямої у просторі, складання рівнянь прямої у просторі

Література для опрацювання: В.М. Лейфура, стор. 129 – 132

Форма контролю: Перевірка домашніх робіт

Обов'язкове домашнє завдання №2. "Розв'язування задач аналітичної геометрії"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти складати рівняння прямих на площині та рівняння кривих другого порядку

Форма самостійної роботи студентів: Розв'язування ОДЗ №2.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов'язкових домашніх завдань та їх аналіз

Модуль 2 "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ"

Тема 5 "Функції. Властивості функцій"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати основні властивості функцій, вміти перевіряти функцію на парність, знаходити область визначення функції, знаходити точки перетину графіка функції з осями координат.

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, письмові відповіді на питання, розв'язування вправ.

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 46-48;
О.І. Соколенко, Г.А. Новик, стор. 10-19

Форма контролю: Тестування

Домашня практична робота 1 "Розв'язування вправ на обчислення границь"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти знаходити границю функції в точці, на нескінченності, використовувати чудові границі.

Форма самостійної роботи студентів: Домашня практична робота.

Завдання для домашньої практичної роботи: додаються окремо

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 345 – 346

Форма контролю: Перевірка домашніх практичних робіт, класна самостійна робота

Тема 6 "Еластичність функцій"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати визначення відносної похідної, формулу для обчислення еластичності функції. Вміти визначати процент зміни функції у разі зміни аргументу на 1%.

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, письмові відповіді на питання

Література для опрацювання: В.М. Лейфура, стор. 472 – 474

Форма контролю: Фронтальне опитування.

Тема 7 "Похідні вищих порядків"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати визначення похідної 2-го порядку та її механічний зміст. Вміти знаходити похідні другого порядку.

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, письмові відповіді на питання, розв'язування вправ.

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 77;
В.П.Дубовик, стор. 223-224

Форма контролю: Перевірка конспекту. Фронтальна бесіда.

Домашня практична робота 2 "Диференціювання функцій"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти диференціювати функції, знаходити похідні 2-го порядку.

Форма самостійної роботи студентів: Домашня практична робота.

Завдання для домашньої практичної роботи: Додаються окремо

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 71 – 77

Форма контролю: Перевірка домашніх робіт, класна самостійна робота

Обов'язкове домашнє завдання №3 "Теорія границь. Обчислення похідних і диференціалів"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти знаходити границі функцій та обчислювати похідні.

Форма самостійної роботи студентів: Розв'язування ОДЗ №3.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов'язкових домашніх завдань та їх аналіз

Домашня практична робота 3 "Дослідження функції та побудова її графіка"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти виконати повне дослідження функції та побудувати її графік.

Форма самостійної роботи студентів: Домашня практична робота.

Завдання для домашньої практичної роботи: Додаються окремо

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 94 – 96

Форма контролю: Перевірка домашніх практичних робіт

Тема 8 "Повний приріст та повний диференціал функції"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати визначення повного диференціалу функції, вміти знаходити повний диференціал функції та мати уяву про використання повного диференціалу в наближених обчисленнях

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, письмові відповіді на питання, розв'язування вправ.

Література для опрацювання: В.В. Барковський, стор. 248 –249

Форма контролю: Фронтальне опитування. Математичний диктант

Обов'язкове домашнє завдання №4 "Диференціальне числення функції двох змінних"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти досліджувати функцію двох змінних на екстремум, шукати частинні похідні першого та другого порядків.

Форма самостійної роботи студентів: Розв'язування ОДЗ №4.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов'язкових домашніх завдань та їх аналіз

Модуль 3 "ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ"

Тема 9 "Основні властивості визначеного інтеграла"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати основні властивості визначеного інтегралу, вміти їх використовувати при інтегруванні функцій

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, конспектування матеріалу.

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 143-145;

Форма контролю: Математичний диктант

Обов'язкове домашнє завдання №5 "Інтегрування функцій. Обчислення визначених інтегралів"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти виконувати операцію інтегрування.

Форма самостійної роботи студентів: Розв'язування ОДЗ №5.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов'язкових домашніх завдань та їх аналіз

Модуль 4 "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ"

Домашня практична робота 4 "Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати алгоритм та вміти розв'язувати лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Форма самостійної роботи студентів: Домашня практична робота.

Завдання для домашньої практичної роботи: Додаються окремо

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 177-178

Форма контролю: Перевірка домашніх практичних робіт

Домашня практична робота 5 "Розв'язування однорідних диференціальних рівнянь першого порядку"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати алгоритм та вміти розв'язувати однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Форма самостійної роботи студентів: Домашня практична робота.

Завдання для домашньої практичної роботи: Додаються окремо

Література для опрацювання: В.В. Барковський, стор. 322-323

Форма контролю: Перевірка домашніх практичних робіт

Обов'язкове домашнє завдання №6 "Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Вміти розв'язувати чотири типи диференціальних рівнянь першого порядку.

Форма самостійної роботи студентів: Розв'язування ОДЗ №6.

Практичні завдання для самостійної роботи студентів: Варіанти завдань визначає викладач

Форма контролю: Перевірка обов'язкових домашніх завдань та їх аналіз

Тема 10 "Знакозмінні ряди та ряди з довільними членами"

Знання і навички, якими необхідно оволодіти: Знати визначення абсолютно збіжних і умовно збіжних знакозмінних рядів, вміти досліджувати знакозмінні ряди та ряди з довільними членами на абсолютну і умовну збіжності

Форма самостійної роботи студентів: Вивчення питань теми, конспектування матеріалу, розв'язування вправ

Література для опрацювання: І.І. Литвин, стор. 191;

В.М.Лейфура, стор. 353-356

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

Тема 1 ЕКВІВАЛЕНТНІ МАТРИЦІ

І.І. Литвин, стор. 259.

Дві матриці називають ***еквівалентними***, якщо одна отримана з іншої з допомогою елементарних перетворень. ***Елементарними перетвореннями*** називають наступні операції:

1) перестановка двох рядків або стовпців матриці;

2) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на одне і те ж число, відмінне від нуля;

3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число.

Приклад. Розглянемо матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 25 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Матриці A, B, C, D еквівалентні, бо:

– матриця B одержана з матриці A перестановкою першого та другого рядків;

– матриця C одержана з матриці A шляхом множення всіх елементів другого рядка на число 5;

– матриця D одержана з матриці A заміною третього рядка сумою подвоєних елементів першого рядка та елементів третього.

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте письмові відповіді на питання:
   1) Які матриці називаються еквівалентними?
   2) Які перетворення матриць є елементарними?
2. Розгляньте приклад на сторінці 259 підручника.
3. Задана матриця $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Зробіть елементарні перетворення матриці A і отримайте:

– матрицю B, еквівалентну матриці A, таку, щоб її елемент a_{31} дорівнював одиниці;

– матрицю C, еквівалентну матриці A, таку, щоб її елемент a_{21} дорівнював нулю;

– матрицю D, еквівалентну матриці A, таку, щоб її елементи a_{13} та a_{33} були рівними.

Тема 2 ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

І.І. Литвин, стор 262-263.

1. Визначник не змінюється при транспонуванні матриці. Рядки та стовпці визначника рівноправні.

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (або стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) помножити на деяке число, то і визначник помножиться на це ж число.

Наслідок: якщо всі елементи рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

4. Визначник, у якого елементи одного рядка (стовпця) відповідно дорівнюють елементам другого рядка (стовпця), дорівнює нулю.

5. Якщо визначник містить два пропорційних рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.

6. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), можливо помножені на деякий коефіцієнт, то визначник не зміниться.

7. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

8. Якщо один рядок (стовпець) визначника складається лише з нулів, то цей визначник дорівнює нулю.

9. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників матриць $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$.

Приклад. Обчислити визначник: $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 60 & 17 & 34 & 20\\ 15 & 43 & 66 & 5\end{vmatrix}$.

Розв'язок: Віднімемо від першого стовпчика потроєний останній стовпець, одержаний визначник розкладемо по першому стовпчику:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 99 & 83 & 1\\ 0 & 8 & 16 & 0\\ 0 & 17 & 134 & 20\\ 0 & 43 & 106 & 5\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}8 & 16 & 0\\ 17 & 134 & 20\\ 43 & 106 & 5\end{vmatrix}$$

Далі можна використати приведене правило трикутника або продовжувати використовувати властивості визначників для подальшого спрощення виразу. Так, віднімемо від другого стовпця подвоєний перший стовпець, одержаний визначник третього порядку розкладемо по першому рядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}8 & 0 & 0\\ 17 & 100 & 20\\ 43 & 20 & 5\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}100 & 20\\ 20 & 5\end{vmatrix}=8\cdot\ 500-400\ =800$$

Завдання для самостійної роботи

1. Прочитайте властивості визначників та зробіть конспект прочитаного.
2. Розберіть приклад використання властивостей визначників при їх обчисленні.
3. Спробуйте самостійно обчислити визначники матриць A і B, використовуючи властивості визначника для зменшення кількості обчислень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Тема 3 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

В.М. Лейфура, стор. 123-129
І.І. Литвин, стор. 306-311

Прямі лінії на площині можуть бути задані у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом, у загальному вигляді або в канонічному. Вони можуть бути паралельними, перетинатися або збігатися. Розглянемо умови паралельності і перпендикулярності прямих, заданих різними способами та навчимося визначати кут між пересічними прямими.

1. Якщо прямі задані в загальному вигляді: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

– коефіцієнти при відповідних координатах пропорційні у випадку паралельності прямих, тобто виконується рівність $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$;

– скалярний добуток їх нормальних векторів дорівнює нулю у випадку перпендикулярні прямих, тобто $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$;

– якщо прямі перетинаються й утворять кут φ, то обчислити кут можна за формулою $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

2. Якщо прямі задані канонічними рівняннями $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1}$ та $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2}$, то

– вони паралельні, якщо $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$; – вони перпендикулярні, якщо $l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$;

– кут між ними обчислюється за формулою $\cos\varphi = \dfrac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$.

3. Якщо прямі задані у вигляді рівнянь із кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$, то

– вони паралельні, якщо $k_2 = k_1$;

– вони перпендикулярні, якщо $k_1 \cdot k_2 = -1$ або $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$;

– кут між ними обчислюється за формулою $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$.

Якщо прямі $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ ***перетинаються у деякій точці***, то точка перетину належить кожній з цих прямих і її координати є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_2 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Відстань d від точки $M_1\ x_1, y_1$ до прямої $Ax + By + C = 0$ можна знайти, користуючись формулою $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Приклади розв'язування задач

<u>*Приклад 1.*</u> Визначити, які кути утворюють із прямою $l_1: 3x + y - 6 = 0$ прямі $l_2: x + 2y + 1 = 0$; $l_3: 6x + 2y - 1 = 0$; $l_4: x - 3y + 2 = 0$.

Розв'язок: Приведемо рівняння даних прямих до форми рівнянь із кутовими коефіцієнтами. Для цього розв'яжемо кожне з них відносно y:

$$l_1: y = -3x + 6 \qquad l_2: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \qquad l_3: y = -3x + \frac{1}{2} \qquad l_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Маємо, $k_1 = -3,\ k_2 = -\dfrac{1}{2},\ k_3 = -3,\ k_4 = \dfrac{1}{3}$;

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{1-2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1, \quad \varphi_{1-2} = \frac{\pi}{4};$$

$l_3 \parallel l_1$, тому що $k_3 = k_1 = -3$; $\qquad l_4 \perp l_1$, тому що $k_4 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

<u>*Приклад 2.*</u> У трикутнику з вершинами $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 1)$, $C(2;\ 4)$ знайти кут α при вершині A, а також рівняння висоти CD і медіани BM.

Розв'язок: Знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AC: $k_1 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2 - 1}{5 - 1} = \dfrac{1}{4}$; і $k_2 = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{4 - 1}{2 - 1} = \dfrac{3}{1} = 3$. Визначимо кут α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} = \frac{3 - \frac{1}{4}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{11}{7}; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{11}{7}.$$

Пряма CD перпендикулярна прямій AB, отже $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$, а відповідне рівняння $y-4=-4(x-2)$.

Точка M ділить відрізок AC навпіл, отже $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$;

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Через точки $B(5;\ 2)$ і $M\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ проходить пряма, рівняння якої складаємо у вигляді $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Одержимо: $\frac{y-2}{\frac{5}{2}-2} = \frac{x-5}{\frac{5}{2}-5} \Rightarrow -\frac{7}{2}(y-2) = \frac{1}{2}(x-5) \Rightarrow -7y+14 = x-5$ або $y = \frac{1}{7}x + \frac{19}{7}$.

<u>*Приклад 3.*</u> Дано вершини чотирикутника: $A(-3,\ 1), B(4;\ 7), C(6;\ 4), D(2,\ -1)$. Знайти точку перетину його діагоналей.

Розв'язок: Складемо рівняння прямої AC, як прямої, що проходить через дві точки $A(-3,\ 1)$ і $C(6,\ 4)$: $\frac{x+3}{6+3} = \frac{y-1}{4-1}$, або $x-3y+6=0$

Складемо рівняння прямої BD: $\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-7}{-1-7}$, або $4x-y-9=0$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x-3y+6=0 \\ 4x-y-9=0 \end{cases}$, дістанемо $x=3$ і $y=3$. отже, точка перетину діагоналей $(3;\ 3)$

<u>*Приклад 4.*</u> Обчислити відстань d від точки $M_1(5;\ 3)$ до прямої $3x+4y+3=0$.

Розв'язок: За формулою $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ знаходимо $d = \frac{|3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 6$.

Завдання для самостійної роботи

1. Запишіть в конспекті умови паралельності і перпендикулярності прямих, які задані загальним, канонічним рівнянням та рівнянням з кутовим коефіцієнтом, формули для обчислення кута між прямими.
2. З допомогою якої формули шукають відстань від точки до прямої?
3. Як знайти точку перетину двох прямих?
4. Знайдіть гострий кут між прямими: 1) $5x-12y-16=0$ і $3x+4y-12=0$; 2) $y=1{,}5x+6$ *і* $2y+3x-7=0$; 3) $y=\frac{2}{3}x-7$ *і* $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$
5. Перевірте паралельність прямих $y=-2x+8$ *і* $y=-2x+1$.

6. Перевірте перпендикулярність прямих $\frac{x-x_2}{4}=\frac{y-y_2}{-5}$ i $\frac{x-x_1}{5}=\frac{y-y_1}{-4}$.

7. Обчисліть відстань d між паралельними прямими $3x-4y-20=0$ i $6x-8y+25=0$.

8. Дослідіть взаємне розміщення прямих: 1) $4x+5y-8=0$ i $3x-2y+4=0$;

2) $x+y-3=0$ i $3x-3y-9=0$; 3) $2x+y+1=0$ i $2x+y+5=0$; 4) $x=4$ i $x+y=0$

Тема 4 ПРЯМА ЛІНІЯ У ПРОСТОРІ

В.М. Лейфура, стор. 129-132
В.В. Барковський, стор. 164-166

Пряма у просторі – лінія перетину двох площин, отже її можна задати системою двох лінійних рівнянь – рівнянь площин, які проходять через цю пряму:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

Ці рівняння, узяті разом, називаються ***загальними рівняннями прямої***.

Координати кожної точки даної прямої задовольняють системі рівнянь і кожний розв'язок системи (трійка значень x, y і z) – координати точки, яка лежить на даній прямій.

Якщо пряма AB, яка проходить через точки $A\ x_1, y_1, z_1$ і $B\ x_2, y_2, z_2$, не паралельна жодній координатній площині, їй відповідає система рівнянь $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. (2)

Нехай дано точку $M_0\ x_0, y_0, z_0$ на прямій і *напрямний вектор прямої* $\vec{s}=\ l, m, n$.

За умовою паралельності дістанемо рівняння, які називаються ***канонічними рівняннями прямої***.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\ (3)$$

Рівняння (3) справедливі лише для випадку, коли $l\neq 0, m\neq 0, n\neq 0$. Якщо якась із координат, наприклад l, дорівнює нулю, тобто напрямним вектором прямої є вектор $\vec{s}\ \ 0, y, z$, то рівняння прямої в просторі матимуть вигляд:

$$x=x_0, \qquad \frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \text{ або інакше } \frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

У випадку $m=0$ або $n=0$ рівняннями прямої будуть рівняння

$$y=y_0, \qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{z-z_0}{n} \text{ або інакше } \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{n},$$

$$z=z_0, \quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \text{ або інакше } \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{0}.$$

Якщо кожне з рівних відношень позначити, наприклад, буквою t, то одержимо рівняння

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\},$$

(4), які називаються ***параметричними рівняннями прямої***.

<u>Наприклад:</u> Складемо канонічні і параметричні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1, 2, 3)$ і $M_2(3, 5, 7)$.

Розв'язок: З рівняння (2) маємо: $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{5-2} = \frac{z-3}{7-3}$ або $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$. Для одержання параметричних рівнянь цієї прямої використаємо формули (4):

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t,\ t \in (-\infty; +\infty). \\ z = 3 + 4t \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Прочитайте запропонований матеріал та запишіть в зошиті всі види рівнянь прямої у просторі.
2. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-2, 1, 5)$ та $M_2(4, 3, -1)$.
3. Напишіть канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-2, 2, 5)$ паралельно вектору $\vec{s}(3, 2, 1)$.

Тема 5 ФУНКЦІЇ. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

І.І. Литвин, стор. 46-48
К.Г. Валєєв, стор. 46-55

Вивчаючи різні явища ми маємо справу з величинами, наприклад, швидкістю, силою, ростом волосся, прибутком фірми... . Сукупність всіх значень, які може набувати величина, утворюють множину її значень. Більшість величин пов'язані між собою.

Якщо кожному значенню x із множини значень X можна поставити у відповідність одне і лише одне значення y іншої множини Y, то таку відповідність називають ***функцією***. Множина значень $x_1, x_2, ..., x_n$, для якої визначена функція, називається ***областю визначення функції*** і позначають $D(y)$, а самі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***аргументами функції***. Сукупність всіх значень функції називають ***множиною значень*** і позначають $E(y)$. Область визначення основних елементарних функцій, які вам будуть зустрічатись найбільш часто, наведена в таблиці:

Функція	Аналітичний вираз, що задає функцію	$D(y)$
1. Лінійна функція	$y = ax + b$	$-\infty;+\infty$
2. Степенева функція	$y = x^n$, n – натуральне число	$-\infty;+\infty$
	$y = x^{-n}$, n – натуральне число	$-\infty;\ 0 \ \cup\ 0;\ +\infty$
	$y = x^{\frac{1}{n}}$, n – натуральне число, парне	$0;+\infty$
	$y = x^{\frac{1}{n}}$, n – натуральне число, непарне	$-\infty;+\infty$
3. Показникова функція	$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$-\infty;+\infty$
4. Логарифмічна функція	$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$0;+\infty$

Нагадаємо **<u>основні властивості функцій</u>**:

1. Функція називається ***зростаючою***, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $x_1, x_2 \in D(y)$.

2. Функція називається ***спадною***, якщо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$; $x_1, x_2 \in D(y)$.

3. Функція називається ***монотонною***, якщо вона лише зростаюча або лише спадна в своїй області визначення.

4. Функція називається ***парною***, якщо зміна знаку аргументу не викликає зміни знаку функції. $f(-x) = f(x)$, $x, -x \in D(y)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.

5. Функція називається ***непарною***, якщо зміна знаку аргументу викликає лише зміну знаку функції. $f(-x) = -f(x)$, $x, -x \in D(y)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

6. Функція називається ***обмеженою зверху***, якщо для неї існує таке число M, що виконується умова $f(x) \leq M$, $x \in D(y)$.

7. Функція називається ***обмеженою знизу***, якщо для неї існує таке число m, що виконується умова $f(x) \geq m$, $x \in D(y)$.

8. Функція називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена знизу і зверху $m \leq f(x) \leq M$, $x \in D(y)$.

<u>*Приклад 1*</u>. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

Функція визначена для всіх значень аргументу x, крім тих, при яких знаменник перетворюється в нуль. Розв'язавши рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, знайдемо корені $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Отже, $D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

<u>*Приклад 2*</u>. Дослідити функцію $f(x) = x + x^2$ на парність.

Перевіримо, як поводить себе функція $f(x) = x + x^2$ при значенні аргументу $-x$:

$$f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2 \neq f(x) \neq -f(x)$$

Як бачимо, умови парності і непарності не виконуються. Отже дана функція є ні парною, ні непарною.

Завдання для самостійної роботи

1. Що таке функція?
2. Які ви знаєте способи завдання функцій?
3. Що називають областю визначення функції?
4. Перелічіть основні властивості функції.
5. Яка функція називається зростаючою, спадною, монотонною?
6. Яка це парна функція? непарна?
7. Яка властивість графіка парної та непарної функцій?
8. Які функції називаються обмеженими, обмеженими зверху, знизу?
9. Які ви знаєте елементарні функції?
10. Яка функція називається складною?
11. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$; 2) $y = \dfrac{3x-2}{x+5}$; 3) $y = 5^{3x}$; 4) $y = \lg(4 - x^2)$;

5) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-3x^2 + 5x + 2}}$; 6) $y = \dfrac{1}{2x-1} + \ln(x-2)$

12. Встановіть парність чи непарність функцій:

1) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x}$; 2) $f(x) = \ln(4 - x^2)$; 3) $y(x) = 2x^4 + \cos x$

4) $y = \dfrac{x^2}{\sin 2x}$.

Тема 6 ЕЛАСТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЇ

В.М. Лейфура, стор. 472 – 474
К.Г. Валєєв, стор. 397 – 399

До функцій економічного змісту застосовують поняття еластичності.

Нехай задана функція $y = f(x)$. Зафіксуємо точку x і надамо їй приросту Δx. Відношення $\sigma_x = \dfrac{\Delta x}{x}$ називають **відносним** (процентним) **приростом аргументу.**

Приросту Δx незалежної змінної x відповідає приріст Δy функції $y = f(x)$. Відношення $\sigma_y = \dfrac{\Delta y}{y}$ називають **відносним** (процентним) **приростом функції**.

Складемо відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо існує похідна функції $y=f(x)$, тоді існує границя відношення $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ за умови, що $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'(x)=E_x(y)$$

Ця границя називається **відносною похідною** або **еластичністю функції** $y=f(x)$ відносно змінної x. Отже

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Еластичність функції показує наближено, на скільки процентів зміниться функція $y=f(x)$ у разі зміни незалежної змінної x на 1%.

Функція називається **нееластичною,** якщо $|E_x(f(x))|<1$. Її відносний приріст спадає.

Функція називається **еластичною**, якщо $|E_x(f(x))|>1$. Її відносний приріст зростає.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити еластичність функції $y=2x+4$ у випадку, якщо початкове значення аргументу $x=10$.

Еластичність функції обчислюють за формулою: $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'$.

Маємо, $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{2x+4}\cdot(2x+4)'=\frac{2x}{2x+4}=\frac{x}{x+2}$.

$E_{10}(y)=\frac{10}{10+2}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

Функція $y=2x+4$ при $x=10$ є нееластичною. Її відносний приріст спадає. Зростання початкового значення аргументу на 1% викличе зростання функції на $\frac{5}{6}\%$

Завдання для самостійної роботи

1. Дайте визначення відносного приросту аргументу; відносного приросту функції.
2. Що таке відносна похідна? Яку іншу назву має це поняття?
3. Запишіть формулу для обчислення еластичності функції.
4. Яка функція називається еластичною? нееластичною?
5. Як змінюється відносний приріст еластичної і нееластичної функції?
6. Обчисліть еластичність функцій $y=5x-2$ та $y=5-2x^3$

Тема 7 ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

І.І. Литвин, стор. 77
В.П.Дубовик, стор. 223-224

Нехай на інтервалі $(a; b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$ називається ***першою похідною*** або ***похідною першого порядку***. Перша похідна також є функцією від x. Може трапитись, що функція $f'(x)$ також має похідну на інтервалі $(a; b)$ або в деякій точці цього інтервалу. Цю останню похідну називають ***другою похідною*** або ***похідною другого порядку*** і позначають одним із символів: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S', як було з’ясовано раніше, дорівнює швидкості точки в даний момент часу: $v = S' = f'(t)$. Оскільки прискорення — це похідна від швидкості, то $a = v' = S'' = f''(t)$.

Отже другу похідну можна тлумачити як величину, що дорівнює прискоренню рухомої точки в даний момент часу.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають ***третьою похідною***, або ***похідною третього порядку***, і позначають так: y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Похідною n***-го порядку*** функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ або $y^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ або $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Похідні порядку вище першого називають ***похідними вищого порядку***. Починаючи з похідної четвертого порядку, похідні позначають не штрихами, а цифрами. Порядок похідної береться в дужки для того, щоб не сплутати його з показником степеня.

<u>*Приклад 1*</u>. Знайти четверту похідну функції $y = x^5 - 7x^2 + x - 1$.

Розв’язок: Маємо $y' = 5x^4 - 14x + 1$; $y'' = 20x^3 - 14$; $y''' = 60x^2$; $y^{(4)} = 120x$

<u>*Приклад 2*</u>. Точка рухається по прямій за законом $S = t \cdot \sin t$. Знайти швидкість і прискорення руху при $t = \frac{\pi}{2}$.

Розв’язок: Швидкість руху тіла в даний момент часу рівна похідній шляху S по часу t.

Знаходимо: $v(t) = S' = 1 - \cos t$; $a(t) = S''(t) = -(-\sin t) = \sin t$

Тоді: $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$(м/с); $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$(м/с^2)

Завдання для самостійної роботи

1. Прочитайте запропонований теоретичний матеріал.
2. Запишіть в конспектах визначення похідної другого та n-го порядків.
3. Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці:

а) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2},\ x = 1;$ б) $y = \dfrac{x-1}{5x-2},\ x = 2;$ в) $y = \ 4x^3 - 5x \quad x^2 + 5 \ ,\ x = 1$

4. Точка рухається прямолінійно з швидкістю, яка змінюється по закону $v = 6t^2 - 2t + 11$. Знайти момент часу, коли прискорення точки рівне 2.

5. Тіло рухається прямолінійно по закону $S \ t \ = \dfrac{t^4}{4} - \dfrac{t^3}{2} - 3t^2 + 4$. В який момент часу прискорення точки рівне нулю?

Тема 8 ПОВНИЙ ПРИРІСТ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ.

В.В. Барковський, ч.1 стор. 248-249

Нехай функція $z = f \ \ x; y$ визначена в деякому околі точки $M \ \ x; y$.

Функція $z = f \ \ x; y$ називається ***диференційовною в точці*** M, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, де A і B — дійсні числа, які не залежать від Δx та Δy, а $\alpha = \alpha \ \ \Delta x, \Delta y$, $\beta = \beta \ \ \Delta x, \Delta y$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$

Доведена *теорема про існування частинних похідних диференційовної функції*: якщо функція $z = f \ \ M$ диференційовна в точці $M \ \ x; y$, то вона має в цій точці похідні f'_x і f'_y та $\Delta z = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

При знаходженні частинних похідних розглядуються частинні прирости функції двох змінних, коли лише один з аргументів змінюється, а інший залишається сталим. Якщо змінюються обидва аргументи, то функція отримує повний приріст: *Наприклад*, функція $z = f \ \ x, y$ із зміною x та y отримує повний приріст $\Delta z = f \ \ x + \Delta x; y + \Delta y \ \ - f \ \ x; y$.

Повним диференціалом dz диференційовної в точці M функції називається головна частина повного приросту функції $z = f \ \ x, y$, лінійна відносно Δx та Δy, тобто $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Диференціалами незалежних змінних x та y називають прирости цих змінних $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$. Тоді з урахуванням теореми про існування частинних похідних диференційовної функції визначення повного диференціала можна подати у вигляді рівності:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

Інакше, повний диференціал dz функції z дорівнює сумі її частинних диференціалів $z'_x dx$ та $z'_y dy$

<u>*Приклад 1.*</u> Знайти повний диференціал функції $z = xy^2$ в довільній точці.

Розв'язок:

Повний диференціал $dz = z'_x dx + z'_y dy$ існує за умови неперервності частинних похідних.

Знайдемо частинні похідні: $z'_x = \left(xy^2\right)'_x = y^2; \quad z'_y = \left(xy^2\right)'_y = 2xy$.

Частинні похідні неперервні на всій площині xOy, тому повний диференціал існує,

причому $dz = y^2 dx + 2xydy$

Оскільки $dz \approx \Delta z = f\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - f\left(x; y\right)$ і $dz = z'_x\left(x;\, y\right)dx + z'_y\left(x;\, y\right)dy$, то

$$f\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) - f\left(x; y\right) = z'_x\left(x;\, y\right)dx + z'_y\left(x;\, y\right)dy \text{ або}$$

$$f\left(x + \Delta x; y + \Delta y\right) = f\left(x; y\right) + z'_x\left(x;\, y\right)dx + z'_y\left(x;\, y\right)dy \qquad (1)$$

Формула (1) дозволяє знаходити наближене значення функції двох змінних.

<u>*Приклад 2.*</u> Знайти наближене значення функції $z = x^2 + 2xy + y^3$ в точці $M\left(1{,}03;\, 1{,}97\right)$

Розв'язок:

Нехай $M_0\left(1,\, 2\right)$, тоді $\Delta x = 0{,}03;\ \Delta y = -0{,}03$

$z\left(M_0\right) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^3 = 1 + 4 + 8 = 13$

$z'_x = 2x + 2y,\ z'_x\left(M_0\right) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6$

$z'_y = 2x + 3y^2,\ z'_y\left(M_0\right) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 = 2 + 12 = 14$

Підставимо знайдені значення у формулу (1) і одержимо:

$z\left(M_0\right) = 13 + 6 \cdot 0{,}03 + 14 \cdot \left(-0{,}03\right) = 13 + 0{,}18 - 0{,}42 = 12{,}76$

Завдання для самостійної роботи

1. Яка функція називається диференційовною в точці M?
2. Як формулюється теорема про існування частинних похідних диференційовної функції?
3. Що називають повним диференціалом диференційовної в точці M функції?
4. Як знайти повний диференціал функції?
5. Запишіть формулу, яку використовують для знаходження наближеного значення функції двох змінних.
6. Знайдіть повний диференціал функції:

а) $z = 3^{\frac{2y}{x}}$; б) $u = \ln\left(3 - x^3 + y^2\right)$; в) $z = \sqrt{2 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4}}$

7. Обчисліть наближено за допомогою повного диференціала число $a = 1,04^{2,03}$

Тема 9 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

І.І. Литвин, стор. 143-145
В.М.Лейфура, стор. 528-529

Всі нижче приведені властивості сформульовані в припущенні, що дані функції інтегровані на відповідних проміжках.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz = \ldots$$

2. Визначений інтеграл з однаковими границями інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

3. При перестановці границь інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

4. Відрізок інтегрування можна розбивати на частини:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{де } a < c < b.$$

5. Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

6. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Завдання для самостійної роботи

1. Запишіть в зошитах основні властивості визначеного інтегралу.

Тема 10 ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ ТА РЯДИ З ДОВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

В. М. Лейфура, стор. 353 – 356,
І. І. Литвин, стор. 191.

Числовий ряд називається ***знакозмінним***, якщо будь-які два сусідніх члени цього ряду протилежні за знаком. Такий ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$$

Для знакозмінних рядів справджується теорема Лейбніца, яку називають ***ознакою Лейбніца.*** Ознака Лейбніца є достатньою ознакою збіжності знакозмінних рядів і читається так: якщо члени знакозмінного ряду спадають за абсолютною величиною та загальний член ряду a_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n, то ряд збігається, причому для його суми справджується нерівність $0 < S < a_1$.

Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ є збіжним, бо виконуються обидві умови ознаки Лейбніца: 1) $|1| > \left|\frac{1}{2}\right| > \left|\frac{1}{3}\right| > \left|\frac{1}{4}\right| > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right) = 0$. При цьому $0 < S < 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ називають рядом Лейбніца.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігаються одночасно даний ряд і ряд, складений із абсолютних величин його членів.

Наприклад, ряд $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ збігається абсолютно, бо

– для нього виконуються умови ознаки Лейбніца: $|1| > \left|\frac{1}{2^3}\right| > \left|\frac{1}{3^3}\right| > \left|\frac{1}{4^3}\right| > \ldots$, і $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} \right) = 0$,

– ряд, складений із модулів його членів : $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, є узагальненим гармонічним рядом, який збігається при показникові степеня більшому за одиницю.

Проте існують ряди, які самі збігаються, а ряд, утворений з модулів членів цього ряду, розбігається. Прикладом такого ряду є ряд Лейбніца, який сам збігається, а ряд, утворений з модулів його членів, є гармонічним рядом і тому розбігається.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a^n$ називається ***умовно збіжним***, якщо цей ряд збігається, а ряд, складений із модулів його членів розбігається.

Ряд Лейбніца—це ряд, який збігається умовно.

Числовим рядом ***з довільними членами*** називають числовий ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, в якому числа a_n є довільними дійсними числами (додатними, від'ємними чи навіть дорівнюють нулю).

Нехай маємо числовий ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ з довільними членами. Запишемо ряд, утворений з абсолютних величин членів заданого ряду: $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ...$. Доведено, що коли ряд із абсолютних величин збігається, то збігається і заданий ряд з довільними членами.

Для встановлення абсолютної збіжності знакозмінного ряду та ряду з довільними членами використовують ті ж ознаки, що і для збіжності рядів з додатними членами.

<u>Приклад 1</u>. Дослідити на збіжність (абсолютну і умовну) знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - ... + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

Розв'язання: Використовуючи ознаку Лейбніца, маємо

1) $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > ...$; 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, тобто ряд збігається.

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів заданого ряду:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... \text{ або } 1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + ... + \frac{1}{n^{1/2}} + ...$$

Це узагальнений гармонічний ряд, який розбігається, тому що $\rho = \frac{1}{2} < 1$. Отже, заданий ряд збігається умовно.

Завдання для самостійної роботи

1. Чи може збігатись ряд, якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$?

2. Чи можна стверджувати, що ряд збігається, якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

3. Яка ознаки збіжності числових рядів з додатними членами базується на порівнянні рядів?

4. Сформулюйте ознаку Д'Аламбера.

5. Який ряд називається знакозмінним?

6. Який ряд називається рядом з довільними членами?

7. Сформулюйте ознаку Лейбніца.

8. Який ряд називають абсолютно збіжним? умовно збіжним?

9. Дослідіть на збіжність знакозмінні ряди:

а) $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(3n-1)^2} + \ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)!}$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ОБОВ'ЯЗКОВИХ ДОМАШНІХ РОБІТ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Завдання для ОДЗ 1

Розв'яжіть систему рівнянь всіма відомими вам способами.

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5 \\ x+y+5z=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} x+3y-13z=-6 \\ 4x-y+z=3 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y-z=-4 \\ 3x-2y+2z=1 \\ 2x-3y+z=-6 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y-z=5 \\ y+3z=-4 \\ 2x-7y-z=-10 \end{cases}$
Варіант 5	**Варіант 6**	**Варіант 7**	**Варіант 8**
$\begin{cases} x+3y-4z=15 \\ 2x-7y+3z=-7 \\ 3x-y-z=14 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 3x+2y+z=-6 \\ 4x-y-z=-9 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y+z=7 \\ 5x+3y+3z=14 \end{cases}$
Варіант 9	**Варіант 10**	**Варіант 11**	**Варіант 12**
$\begin{cases} -x+3y-z=2 \\ x-2y+3z=6 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-2y+z=9 \\ x+2y-z=-3 \\ 4x-10y+5z=33 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y+z=10 \\ x+2y+3z=12 \\ 4x-y+z=6 \end{cases}$	$\begin{cases} 9x-9y-z=37 \\ 2x-y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Завдання для ОДЗ 2

<u>Завдання 1</u>

Використовуючи задані координати вершин трикутника ABC, побудувати трикутник та скласти чи знайти:

– довжину сторони AC; загальне рівняння AC; відстань від точки B до AC;
– рівняння медіани сторони BC у канонічній формі; кут ACB;
– рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно AC.

P	Координати		
	A	B	C
1	(N; N+1)	(N+2; N+6)	(N+3; N+5)
2	(N+1; N)	(N; N+2)	(N+4; N+3)
3	(N+2; N+1)	(N+3; N+2)	(N+4; N)
4	(N+1; N+3)	(N+2; N+4)	(N+1; N)

В завдані 1 значення P та N для кожного студента визначає викладач.

Завдання 2

Варіант 1

1. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомі дві його вершини $(0;3)$ і $(0;-3)$, а відстань між фокусами дорівнює 8.

2. Знайти рівняння асимптот гіперболи $4x^2-5y^2=100$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола знаходиться праворуч від осі Oy і $p=5$.

Варіант 2

1. Знайти координати фокусів еліпса $2x^2+y^2=32$.

2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $2a=14,\ \varepsilon=9/7$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола знаходиться ліворуч від осі Oy і $p=6$.

Варіант 3

1. Скласти рівняння еліпса з ексцентриситетом $\varepsilon=0,28$ і фокусами $(\pm 7,0)$.

2. Визначити координати фокусів гіперболи $24y^2-25x^2=600$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо фокус параболи має координати $F(-2,0)$.

Варіант 4

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Oy, якщо його більша вісь дорівнює 8, а відстань між фокусами — 6.

2. Визначити ексцентриситет гіперболи $36x^2-64y^2=2304$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо директриса задається рівнянням $2y+5=0$.

Варіант 5

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Oy, якщо відстань між фокусами дорівнює 6, а ексцентриситет $0,6$.

2. Визначити довжини осей та фокусну відстань гіперболи $16x^2-25y^2=400$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола розміщена праворуч від осі Oy і проходить через точку $A(3,-6)$.

Варіант 6

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Oy, якщо його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\dfrac{12}{13}$.

2. Визначити ексцентриситет і записати рівняння асимптот гіперболи $24y^2-25x^2=600$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо парабола знаходиться вище осі Ox і проходить через точку $A(-5,2)$.

Варіант 7

1. Знайти координати фокусів еліпса $9x^2+25y^2=4$.

2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $2c=6$, а $\varepsilon=1,5$.

3. Визначити координати фокуса і скласти рівняння директриси параболи $y^2=24x$.

Варіант 8

1. Знайти ексцентриситет еліпса $16x^2+25y^2=400$.

2. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо $F\left(\pm 2\sqrt{2},0\right)$, $\varepsilon=2$.

3. Визначити координати фокуса і скласти рівняння директриси параболи $x^2=-32y$.

Варіант 9

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox, якщо відомо, що він проходить через точки $M_1\left(1;-3/2\right)$ та $M_2\left(-2;0\right)$. Знайти координати фокусів еліпса.

2. Скласти рівняння гіперболи, дійсна вісь якої дорівнює 6, а відстань між фокусами дорівнює 8. Записати рівняння спряженої гіперболи.

3. Знайти координати фокуса та написати рівняння директриси для параболи $y^2=8x$.

Варіант 10

1. Скласти рівняння еліпса, у якого довжина малої осі дорівнює 24, а один із фокусів має координати $\left(-5;\,0\right)$.

2. Знайти координати вершин, осі, фокуси та ексцентриситет гіперболи $4x^2-5y^2-100=0$.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо координати фокуса $F\left(0;\,4\right)$

Варіант 11

1. Знайти координати вершин, осі, фокуси та ексцентриситет еліпса $9x^2+25y^2-225=0$.

2. Скласти рівняння гіперболи, дійсна вісь якої лежить на осі абсцис, яка проходить через точки $M_1\left(3;-2\right)$ і $M_2\left(-6;\,2\sqrt{10}\right)$. Знайти ексцентриситет та координати фокусів гіперболи.

3. Скласти рівняння параболи з вершиною на початку координат, якщо координати фокуса $F\left(0;-3\right)$

Варіант 12

1. Написати рівняння еліпса, у якого сума півосей дорівнює 36, а відстань між фокусами, що лежать на осі Oy, дорівнює 48.

2. Знайти координати вершин, осі, фокуси та ексцентриситет гіперболи $9x^2 - 4y^2 - 144 = 0$

3. Парабола симетрична відносно осі Ox, вершина її знаходиться на початку координат, а відстань між фокусом і вершиною дорівнює 12. Написати рівняння параболи.

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛІВ

Завдання для ОДЗ 3

Варіант 1

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-1}}{1+\sqrt{3x}};\quad 2\ \lim_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x+4};\quad 3\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2+2x-1}{2x^2-x+5};\quad 5\ \lim_{x\to 0}\frac{-2}{3x^2-x};\quad 6\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x-3}$$

2. Знайти похідні функцій:

$$1\ y = \ 2x+3 \quad x^2+3x-1\ ;\quad 2\ y=\ln\ x^2-2\ ;\quad 3\ y=\cos 5x;$$

$$4\ y=\ x^3-x^2+1\ ^4;\quad 5\ y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y = x + \sin\ 2x-1\ ;\quad 2)\,y = 3^{\cos x}$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$

Варіант 2

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^4-3}}{1-\sqrt{8x}};\quad 2\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+8x-15}{x-3};\quad 3\ \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2x+5}-1};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x-12}{3x^2-2x-7};\quad 5\ \lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x^2+3x};\quad 6\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$$

2. Знайти похідні функцій:

$$1\ y=3x^2-2^{\sin x}+\mathrm{tg}\,2x;\quad 2\ y=\frac{x^3+1}{x^2-2};\quad 3\ y=\mathrm{tg}^2\,3x;$$

$$4\ y=\ 2x^3+3x-1\ ^3;\quad 5\ y=\lg\ 3x^2+2x$$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y = x + \sin\ 2x-1\ ;\quad 2)\,y = 3^{\cos x}$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x^3 + 2}{x^3 - 2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$

Варіант 3

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x \to 2} \frac{5x+1}{3x+2};\quad 2\ \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - 6x + 9};\quad 3\ \lim_{x \to 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{2x^3};$$

$$4\ \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 1};\quad 5\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x};\quad 6\ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{3x}$$

2. Знайти похідні функцій:

$$1\ y = \ 2x^2 - 4 \quad 3x^3 + x^2 \ ;\quad 2\ y = \frac{x+a}{x-a};\quad 3\ y = \mathrm{tg}\ \ 2x + 3\ ;$$

$$4\ y = \ 3x^4 - 2x^3 + 1\ ^4;\quad 5\ y = \log_5\ 3x^2 + 1$$

3. Знайти диференціал функції:

$$1\ y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} \qquad 2)y = \ \mathrm{tg}\,3x + e^x\ ^3$$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0 = -2$

Варіант 4

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 1}{3x - 2};\quad 2\ \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - 6x + 8};\quad 3\ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x};$$

$$4\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^5}{x^5 - x^2 + 3};\quad 5\ \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x}{x^2};\quad 6\ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x-1}$$

2. Знайти похідні функцій:

$$1\ y = \ 4 - x \quad 3x^4 + x^2 + x\ ;\quad 2\ y = \frac{x^2 + 6}{x - 6};\quad 3\ y = \cos 2x^2;$$

$$4\ y = \ 3x^3 + 8x^2 - 3\ ^3;\quad 5\ y = \log_2\ 2^x + 1$$

3. Знайти диференціал функції: $1\ y = \dfrac{x}{x-1} \quad 2)y = \ e^{\sin x} - 1\ ^2$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$

Варіант 5

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2};\quad 2\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-6x+8};\quad 3\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^6}{x^3+x^4};\quad 5\ \lim_{x\to 0}\frac{7}{x^3-x};\quad 6\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

2. Знайти похідні функцій: $1\ \ y=\ 2+4x^3\ \ 1-3x^2\ ;\quad 2\ \ y=\dfrac{x^3}{4-x};$

$$3\ \ y=\cos\left(-\frac{3}{x}\right);\quad 4\ \ y=\ 2x^3-7x\ ^5;\quad 5\ \ y=\ln\ x^2+2x$$

3. Знайти диференціал функції: $1\ \ y=x\cdot\cos 0{,}5x;\quad 2\ \ y=\sqrt{1+x^2}$

4. Складти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2-x}{3x-4}$ в точці з абсцисою $x_0=2$

Варіант 6

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2};\quad 2\ \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-3x-10};\quad 3\ \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x^3-x};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^4+1}{x^3-x^2};\quad 5\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+11x-12}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}};\quad 6\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{x}\right)^{2x}$$

2. Знайти похідні функцій:

$$1\ \ y=\ -3x-x^2\ \ 2+x-3x^3\ ;\quad 2\ \ y=\frac{2x^2}{3+2x};\quad 3\ \ y=\sin\frac{3}{x^2};$$

$$4\ \ y=\ 4x^2+3x-2\ ^3;\quad 5\ \ y=\ln\ x^3+2^{3x}-1$$

3. Знайти диференціал функції: $1\ \ y=\ x^2+1\ \cdot\mathrm{tg}\,5x;\quad 2\ \ y=\sqrt{x^2-7x}$

4. Складти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ в точці з абсцисою $x_0=3$

Варіант 7

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3};\quad 2\ \lim_{x\to 10}\frac{x-10}{x^2-12x+20};\quad 3\ \lim_{x\to 0}\frac{4}{5x+7x^2};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x};\quad 5\ \lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8};\quad 6\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$$

2. Знайти похідні функцій: 1 $y=\ln x^2$; 2 $y=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$; 3 $y=\sin\ \ x^2+7$

4 $y=\ \ 4x^2+2x-1\ \ ^7$; 5 $y=\ \ 1+4x^3\ \ \ 1+2x^2$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{3}}$; 2 $y=\ln\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x}$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x+\sqrt[3]{x^2}$ в точці з абсцисою $x_0=1$

Варіант 8

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to0}\frac{x^3-2x^2+1}{2x-1};\quad 2\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{3x^2};\quad 3\ \lim_{x\to0}\frac{-2}{2x-3x^3};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^2-3}{x^3-2x^4+2x^5};\quad 5\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{5+2x}};\quad 6\ \lim_{x\to9}\frac{9-x}{x^2-7x-18}$$

2. Знайти похідні функцій: 1 $y=\lg\ \ x^2+3\ $; 2 $y=\dfrac{x^2+5}{-x^3}$; 3 $y=\cos\ \ \sqrt{3x}\ $;

4 $y=\ \ 4e-3x+e^{3x}\ \ ^3$; 5 $y=\ \ 3-2x^4\ \ \ 2+x^2$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\sqrt{\dfrac{2}{x^2+1}}$; 2 $y=\ln\cos^2 x$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=2x-\sqrt{x}$ в точці з абсцисою $x_0=1$

Варіант 9

1. Обчислити границі функцій:

$$1\ \lim_{x\to\frac12}\frac{2x-1}{x^2+x+1};\quad 2\ \lim_{x\to3}\frac{x^2+4x-21}{x-3};\quad 3\ \lim_{x\to9}\frac{9-x}{\sqrt{x}-3};$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-7x+3}{x^3+5x^2+2x-9};\quad 5\ \lim_{x\to0}\frac{x+3x^3}{x^2};\quad 6\ \lim_{x\to0}\frac{3\operatorname{tg}2x}{x}$$

2. Знайти похідні функцій:

1 $y=\ \ x^2-3x\ \ \ 5x^2+1\ $; 2 $y=\dfrac{x^2-2x+4}{2x+7}$; 3 $y=\operatorname{ctg}3x$

4 $y=\ \ x^2+x-7\ \ ^4$; 5 $y=\log_a\ \ x+x^3$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$; 2 $y=\sin^3 2x$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{x+2}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0=-2$

<u>Варіант 10</u>

1. Обчислити границі функцій:

1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+1}{x^2-3x+2}$; 2 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}$; 3 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$;

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x-1}{4x^3-x^2-x+2}$; 5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4x^3}{2x^3}$; 6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos 4x}{x^2}$

2. Знайти похідні функцій: 1 $y=\;x^2-x\;\;3x^4+2\;$; 2 $y=\frac{2x^2-x^3}{x-3}$;

3 $y=\mathrm{ctg}\frac{x^2}{2}$; 4 $y=\;x^5-3x^4+3x^2-1\;^2$; 5 $y=\log_3\;2x^4+x^{-2}$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$; 2 $y=\ln^4\;x-3$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{2x-1}{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0=-1$

<u>Варіант 11</u>

1. Обчислити границі функцій:

1 $\lim\limits_{x\to -1}\;3-2x+x^2+4x^3\;$; 2 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2-16}{4+2x}$; 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2}{3x}$;

4 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2+x}}{x^2-9}$; 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-9}{5x^3-3}$; 6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}$

2. Знайти похідні функцій:

1 $y=2x^3\;\;6x-x^2\;^2$; 2 $y=\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$; 3 $y=3\mathrm{tg}\frac{x^2}{5}$;

4 $y=\;3x^3-2x^4-x\;^5$; 5 $y=\log_2\;4x^5+2x$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\frac{x^2}{5}-\frac{5}{x^2}$; 2 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=2\;\;x^3-2x^2$ в точці з абсцисою $x_0=-2$

Варіант 12

1. Обчислити границі функцій:

1 $\lim\limits_{x\to -1} 1+3x-x^3+2x^5$; 2 $\lim\limits_{x\to -3a}\dfrac{9a^2-x^2}{x+3a}$; 3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{3x}$;

4 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}$; 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4-2x^2+5}{2x^4+13x}$; 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

2. Знайти похідні функцій:
1 $y = 3-2x^3 \quad 3x+2x^2$; 2 $y=\dfrac{2-\sin 3x}{2+\sin 3x}$; 3 $y=4\sin\dfrac{x}{4}$;

4 $y = 3x^4-4x^2+2\ ^{6}$; 5 $y=\ln\ 2x^3-1$

3. Знайти диференціал функції: 1 $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$; 2 $y=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{1}{4}\ 4x-x^2$ в точці з абсцисою $x_0=2$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Завдання для ОДЗ 4

Варіант 1.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=\sqrt[4]{2x^3-\sin y}$.

2. Задано функцію $z=\ln\ xy^2+1$, точку $A\ 1;1$ і вектор $\vec{a}\ -3;-4$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=x^3+y^3-9xy+27$.

Варіант 2.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=\cos\ e^{-x}+y^2$.

2. Задано функцію $z=\ln\ x^2-y^2$, точку $A\ 2;1$ і вектор $\vec{a}\ 3;-4$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=3x^2y+y^3-18x-30y$.

Варіант 3.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=\operatorname{tg}\ y^3-3x^2$.

2. Задано функцію $z=2xy-y^3+x^2$, точку $A\ -1;2$ і вектор $\vec{a}\ -3;4$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=x^3-y^3-3xy$.

Варіант 4.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=\sqrt[3]{2x^2-\ln y}$.

2. Задано функцію $z=x^3-2xy+y^2$, точку $A(-2;-1)$ і вектор $\vec{a}(-6;8)$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=x^2+3y^2-x+18y-4$.

Варіант 5.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=2^{y^3-2x^2}$.

2. Задано функцію $z=x^2+xy^2-y^3$, точку $A(1;-2)$ і вектор $\vec{a}(-6;-8)$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=x^3+3y^2-3xy$.

Варіант 6.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=e^{\sin 2x+y^3}$.

2. Задано функцію $z=13\ln(x^3y^2+1)$, точку $A(1;-1)$ і вектор $\vec{a}(5;12)$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=x^3+y^3-6xy$.

Варіант 7.

1. Знайти мішані похідні другого порядку функції $z=\ln(x^2+e^{-2y})$.

2. Задано функцію $z=x^2+2xy+y^2$, точку $A(1;2)$ і вектор $\vec{a}(3;4)$. Знайти градієнт функції в точці A і похідну в цій точці за напрямом вектора $\vec{a}$.

3. Дослідити на екстремум функцію двох змінних $z=-x^2-xy-y^2+x+y$.

ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Завдання для ОДЗ 5

Варіант 1

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3x}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\displaystyle\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$; 3) $\displaystyle\int(2x-1)e^{3x}dx$.

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\displaystyle\int_1^2\left(e^x+\frac{1}{x}-x^2\right)dx$; 2) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "лівих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результатів, одержаних за допомогою наближених формул.

<u>Варіант 2</u>

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 - 3x - 4 + 5x^5}{x} dx$; 2) $\int \frac{4^x\, dx}{\sqrt{16^x + 1}}$; 3) $\int\ x - 3\ \ e^{2x} dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \left(e^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$; 2) $\int\limits_0^{0,5} e^{\sin x} \cos x\, dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_2^{10} \frac{dx}{x+1}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "правих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

<u>Варіант 3</u>

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\ x - 1\ ^2 dx$; 2) $\int \sqrt{1 - \cos x} \sin x\, dx$; 3) $\int 5 \arcsin 3x\, dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$; 2) $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x\, dx}{1 + 9^x}$; 3) $\int\limits_1^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами трапецій і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

<u>Варіант 4</u>

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\ x - 1\ \cdot\ x + \sqrt{2}\ \ dx$; 2) $\int 5^x \cos 5^x dx$; 3) $\int\ 1 - x\ \ \cos 2x\, dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2 dx}{1 - 4x^3}$; 3) $\int\limits_0^{e-1} x \ln\ \ x + 1\ \ dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{2}^{8}\sqrt{x+2}\,dx$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "лівих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

Варіант 5

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\ 6\sqrt{v}-3v^{2}+5v^{3}\ \ dv$; 2) $\int\frac{\cos x}{\sin^{3}x}dx$; 3) $\int\ 1-2x\ \ \ln x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^{0}\ x^{3}+2x\ \ dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}3e^{x^{3}}x^{2}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln x}{x^{5}}dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "правих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

Варіант 6

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\frac{x^{2}-6x+7x^{3}}{x^{2}}dx$; 2) $\int\frac{\sin x}{\cos^{2}x}dx$; 3) $\int\ 3x-1\ \ \ln x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{4}^{5}\ 4-x\ \ ^{3}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi/6}e^{\sin x}\cos x\,dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{x+2}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами трапецій і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

Варіант 7

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{\ln^{2}x\cdot x}$; 3) $\int\ x-1\ \ \sin 2x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли: 1) $\int\limits_{1}^{3}2^{x}\ \ 1+2^{x}\ \ dx$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin t\,dt}{1+\cos t}$; 3) $\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^1 x^2-4x+3\ dx$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "лівих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

Варіант 8

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int\frac{x^2-7x+3}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{5-\sqrt{x}\ ^4\cdot\sqrt{x}}$; 3) $\int 3x+1\ e^{3x}\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\pi/6}\frac{dx}{1-4\sin^2 x+4\sin^4 x}$; 2) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{2+\sin x}$; 3) $\int\limits_0^1\arccos x\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_3^4\frac{x\,dx}{x^2-4}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за наближеними формулами "правих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближеної формули

Варіант 9

1. Знайдіть інтеграли: 1) $\int\frac{x^2-7x+3}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; 3) $\int x\ln x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/6}\left(\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin x}{3-\cos x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi}x\sin x\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{1+3x\ ^2}$ при $n=10$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "правих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

Варіант 10

1. Знайдіть інтеграли: 1) $\int\frac{1+\cos 2x}{3\cos x}dx$; 2) $\int\operatorname{ctg}x\,dx$; 3) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$

2. Обчисліть інтеграли: 1) $\int\limits_1^2\frac{1-2x+\sqrt{x}}{x^2}dx$; 2) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/3}\frac{\sin x}{3-\cos x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\ln 2}xe^{-x}\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2x+1^{\;3}}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами трапецій і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

<u>Варіант 11</u>

1. Знайдіть інтеграли: 1) $\int \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx$; 2) $\int \frac{5^x\,dx}{1-5^x}$; 3) $\int \ln 3x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_1^{e^3} \frac{4\sqrt[3]{x} - 12 + 9x}{3x} dx$; 2) $\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x} \cdot \sin x\,dx$; 3) $\int\limits_0^1 2xe^{-3x}\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за формулами "лівих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближених формул.

<u>Варіант 12</u>

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{x^3 - 3x + 5}{x^3} dx$; 2) $\int \sin x \sqrt{\cos^3 x}\,dx$; 3) $\int \operatorname{arctg} 3x\,dx$

2. Обчисліть інтеграли:

1) $\int\limits_{-1}^{2} \left(3x^2 + \frac{4}{x^3} - 1\right) dx$; 2) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{c\,\mathrm{tg}\,x \cdot \sin^2 x}}$; 3) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

3. Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^{\;3}}$ за допомогою формули Ньютона – Лейбніца та за наближеними формулами "правих" прямокутників і Сімпсона, поділивши відрізок інтегрування на 10 рівних частин. Оцініть в процентах похибку результату, одержаного за допомогою наближеної формули

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Завдання для ОДЗ 6

Розв'язати диференціальне рівняння

1 варіант

1) $x^3dy = y^3dx$, якщо $x = \sqrt{3},\ \ y = \sqrt{2}$;
2) $x^2y' = 2xy - 3$;
3) $\ x + y\ \ dx + xdy = 0$.

2 варіант

1) $2sdt = tds$, якщо $t = 1,\ \ s = 2$;
2) $xy' - 3y = x^4e^x$, якщо $y = e,\ \ x = 1$;
3) $xyy' = x^2 + y^2$.

3 варіант

1) $\dfrac{dy}{2x} + \dfrac{dx}{y} = 0$, якщо $x = 0,\ \ y = 2$;
2) $x^3y' + 3x^2y = 2$, якщо $y = 1,\ \ x = 1$;
3) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$.

4 варіант

1) $\dfrac{2dy}{dx} = 1 + x^2$, якщо $x = 0,\ \ y = 0$;
2) $x^2y' - 2xy = 3$, якщо $y = 2,\ \ x = 1$;
3) $xy^2dy = \ \ x^3 + y^3\ \ dx$.

5 варіант

1) $\dfrac{2x - 1}{y + 1} = \dfrac{dx}{dy}$, якщо $x = 5,\ \ y = 0$;
2) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$;
3) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.

6 варіант

1) $y' = \dfrac{2y}{x}$, якщо $x = 1,\ \ y = 2$;
2) $xy' - 2y = 2x^4$, якщо $x = 1,\ \ y = 0$;
3) $y' = \dfrac{2x + y}{2x}$.

7 варіант

1) $x^2dy - \dfrac{1}{2}y^3dx = 0$, якщо $x = -1,\ \ y = 1$;
2) $xy' + y = e^{-x}$;
3) $\ \ x^2 - 2xy\ \ dy - \ \ xy - y^2\ \ dx = 0$, якщо $y = 1,\ \ x = 1$.

8 варіант

1) $\ \ 1 + y\ \ dx - \ \ 1 - x\ \ dy = 0$, якщо $x = 0,\ \ y = 1$;
2) $y' - y = e^x$, якщо $x = 0,\ \ y = 2$;
3) $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$.

9 варіант

1) $y' = 10^{x+y}$;
2) $2xy' - y = 5$, якщо $x = 1,\ \ y = 0$;
3) $xy^2y' = x^3 + y^3$, якщо $x = 1,\ \ y = 3$.

10 варіант

1) $2x^2yy' + y^2 = 2$;
2) $xy' + y = x + 1$;
3) $\ \ x - y\ \ dx + xdy = 0$, якщо $y = 0,\ \ x = 1$.

ВПРАВИ ТА ЗАВДАННЯ
для поточного контролю за самостійною роботою студентів

ДІЇ З МАТРИЦЯМИ. ЕКВІВАЛЕНТНІ МАТРИЦІ

Задано матриці: $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -2 & 5\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 7\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$;

$D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; $M=\begin{matrix}3 & 2 & 7\end{matrix}$; $K=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 7\\ 2 & 5 & -1 & 0\end{pmatrix}$; $N=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$;

Усно дати відповіді на питання:

1. Назвіть види записаних матриць та їх розмір.
2. Знайдіть суму та різницю матриць A і B, B і E.
3. До якої з матриць можна додати матрицю C?
4. Які з записаних матриць можна множити?
5. Знайдіть матриці $2A$, $-3C$, $-D$
6. Які матриці називають еквівалентними;
7. Які ви знаєте елементарні перетворення?
8. Виконайте елементарні перетворення матриці C так, щоб елемент c_{11} еквівалентної матриці дорівнював би числу 1; елементи c_{21} і c_{31} були рівними; елемент $c_{21}=0$

ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

Математичний диктант
для поточного контролю за самостійною роботою студентів

Продовжити речення:

1 варіант

1. При транспонуванні матриці визначник …
2. Алгебраїчним доповненням елемента визначника називають …
3. Визначник змінить знак на протилежний, якщо …
4. Визначник другого порядку дорівнює ...
5. Якщо всі елементи рядка мають спільний множник, то...

2 варіант

1. Способи обчислення визначників третього порядку такі…
2. Визначник трикутної матриці дорівнює …
3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка помножити на деяке число, то і ...
4. Мінором елемента визначника називають …
5. Визначник, у якого елементи одного стовпця пропорційні елементам другого стовпця,...

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Тести
для поточного контролю
за самостійною роботою студентів

<table>
<tr><th>Завдання</th><th>Відповіді</th></tr>
<tr><td>

1 варіант
1. Прямі, задані в загальному вигляді, паралельні, якщо....
2. Рівняння $3x+5y-7=0$ називають....
3. Прямі, задані у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом, перпендикулярні, якщо...
4. Які з перелічених прямих паралельні?
$l_1: 5x-2y+3=0;\ \ l_2: 10x+4y-1=0$
$l_3: 15x+6y+3=0; l_4: x-0,4y-3=0$
5. В рівнянні $\frac{x}{2}-\frac{y+1}{3}=0$ числа 2 і 3 це...
6. Прямі, задані канонічними рівняннями, перпендикулярні, якщо....
7. Рівняння $3\ x-2\ +2\ y+3\ =0$ називають....
8. Якщо прямі, задані канонічним рівнянням, перетинаються і утворюють кут φ, то його можна обчислити за формулою...

</td><td rowspan="2">

1). $l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 = 0$
2) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$
3) $\cos\varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$
4) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$
5) $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$
6) $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$
7) $k_2 = k_1$
8) $k_1 \cdot k_2 = -1$
10) l_2 і l_3
9) $\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$
11) l_1 і l_4
12) l_1 і l_2
13) l_2 і l_4
14) l_1 і l_3
15) l_4 і l_3
16) координати напрямного вектора
17) координати нормального вектора
18) координати точки, що належить прямій
19) канонічним рівнянням прямої
20) нормальним рівнянням прямої
21) загальним рівнянням прямої
24) рівнянням прямої, що проходить через задану точку паралельно заданому вектору
23) рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору
22) рівнянням з кутовим коефіцієнтом

</td></tr>
<tr><td>

2 варіант
1. Якщо прямі, задані в загальному вигляді, перетинаються і утворюють кут φ, то його можна обчислити за формулою...
2. Рівняння $y-2=3\ x+7$ називають....
3. Прямі, задані в загальному вигляді, перпендикулярні, якщо....
4. Прямі, задані у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом, паралельні, якщо...
5. В рівнянні $2x-5y+13=0$ числа 2 і -5 це...
6. Прямі, задані канонічними рівняннями, паралельні, якщо....
7. Рівняння $\frac{x+1}{2}-\frac{y}{3}=0$ називають....
8. Які з перелічених прямих перпендикулярні?
$l_1: y=-3x+7;\qquad l_2: y=3x-1;$
$l_3: y=\frac{1}{3}x-7;\qquad l_4: y=-\frac{1}{3}x+1$

</td></tr>
</table>

ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Завдання
для домашньої практичної роботи №1

Варіант 1

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x}{2x^3-x^2-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x+2x^2-8}$;

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{x^2-a^2}-\dfrac{1}{x-a}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x-1}$.

Варіант 2

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-7x+10}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+8x^2}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{3x^2-x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x+2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$.

Варіант 3

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5-5x}{15-15x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4x^2-x^2}{x-2a}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x+1}$.

Варіант 4

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2x-2a}{5x^2-5a^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{4x^2+7x-5}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-6x}{7x-8x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$.

ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Письмова робота
для поточного контролю за самостійною
роботою студентів

Варіант 1

Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{x-\sqrt{5}}{5-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2}{x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+4}{10x+1}$

Варіант 2

Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^3}}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+x^2}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)$

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Письмова робота
для поточного контролю за самостійною
роботою студентів

Варіант 1

Обчислити похідні:

1) $y=\ 2+4x^3\quad 1-3x^2$; 2) $y=\ 2x^3-7x\ ^5$; 3) $y=\dfrac{x^3}{4-x}$;

4) $y=\cos\dfrac{2}{x}$; 5) $y=\ln\ x^2+2x$; 6) $y=5^{\sin 3x}$

Варіант 2

Обчислити похідні:

1) $y=\ x^2+4x\quad 3x^2+12$; 2) $y=\ x^2+x-7\ ^4$; 3) $y=\dfrac{x^2-2x}{2x+7}$;

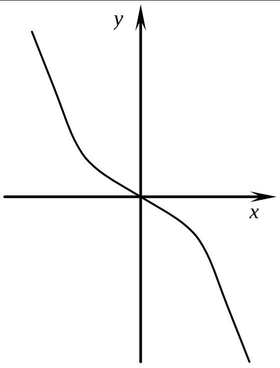
4) $y=\log_a\ x+x^3$; 5) $y=\mathrm{tg}\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)$; 6) $y=2^{\ x^2+3x\ ^2}$

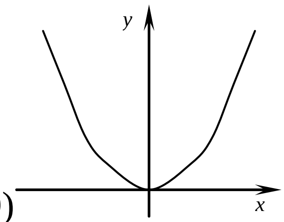
ФУНКЦІЯ. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ

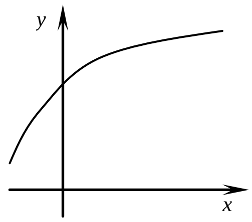
Тести

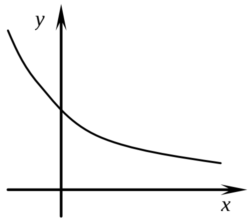
для поточного контролю
за самостійною роботою студентів

Завдання	Відповіді
<u>1 варіант</u> 1. Графік парної функції зображений на малюнку... 2. Область визначення функції позначають.... 3. Областю визначення функції $y = x^2$ є інтервал.... 4. Якщо функція зростаюча і $x_1 > x_2$, то вірною є нерівність.... 5. Якщо на деякому інтервалі функція $y = f\ \ x$ тільки зростає, то вона на цьому інтервалі.... 6. Областю визначення функції $y = \frac{1}{x}$ є інтервал.... 7. Якщо значення функції $y = f\ \ x$ в точках x і $-x$ однакові, то ця функція.... 8. Якщо виконується умова $f\ \ x\ \ \le M$, то функція $y = f\ \ x$ ... 9. Графік спадної функції зображений на малюнку... 10. Рівняння осі Ox має вигляд....	1) $0; +\infty$ 2). $f\ \ x_1\ \ < f\ \ x_2$ 3) $-\infty; 0\ \cup\ 0; +\infty$ 4) $D\ \ y$ 5) $f\ \ x_1\ \ > f\ \ x_2$ 6) обмежена зверху 7) монотонна 8) $E\ \ y$ 9) парна
2 варіант 1. Графік непарної функції зображений на малюнку... 2. Множину значень функції позначають.... 3. Областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є інтервал.... 4. Якщо на деякому інтервалі функція $y = f\ \ x$ тільки спадає, то вона на цьому інтервалі.... 5. Якщо виконується умова $f\ \ x\ \ \ge m$, то функція $y = f\ \ x$ .... 6. Графік зростаючої функції зображений на малюнку... 7. Рівняння осі Oy має вигляд.... 8. Якщо значення функції $y = f\ \ x$ в точках x і $-x$ протилежні, то ця функція.... 9. Областю визначення функції $y = \frac{1}{x^2+1}$ є інтервал.... 10. Якщо функція спадна і $x_1 > x_2$, то вірною є нерівність....	10) $-\infty; 0$ 11) обмежена знизу 12) $x = 0$ 13) непарна 14) $0, +\infty$ 15) $-\infty; +\infty$ 16) $-\infty; -1$ 17) $y = 0$

18) 

19) 

20) 

21) 

ЕЛАСТИЧНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Питання для фронтального опитування
з метою поточного контролю за самостійною роботою студентів

1. Що називають відносним приростом аргументу; відносним приростом функції?
2. Що таке відносна похідна? Яку іншу назву має це поняття?
3. Запишіть формулу для обчислення еластичності функції.
4. Яка функція називається еластичною? нееластичною?
5. Як змінюється відносний приріст еластичної і нееластичної функції?

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Завдання
для домашньої практичної роботи №2

Варіант 1

1. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = 2^x + 3^x + 5^x$; 2) $y = \dfrac{1+2^x}{1-2^x}$; 3) $y = 3^{2x^2}$; 4) $y = 3x^2 \cdot 2^{x+1}$;

5) $y = \sin x + 3\cos x$; 6) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$; 7) $y = x^3 \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x}$; 8) $y = 5^{\sqrt{1+x^2}}$

2. Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці:

1) $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2}$, $x = 1$; 2) $y = \dfrac{2x+3}{3x+7}$, $x = 1$

Варіант 2

1. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = 4^x \cdot 5^x$; 2) $y = \dfrac{10^x}{10^x - 3}$; 3) $y = 4^{\sqrt{x}}$; 4) $y = 2e^x \cdot \sqrt{x}$;

5) $y = 4\mathrm{ctg}\, x - 3\mathrm{tg}\, x$; 6) $y = \mathrm{tg}\, x \ \cos x + \sin x$; 7) $y = \mathrm{tg}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; 8) $y = 6^{\frac{x}{x+1}}$

2. Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці:

1) $y = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{6}{x^2}$, $x = 2$; 2) $y = \dfrac{5x}{x-3}$, $x = 1$

Варіант 3

1. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = 4e^x \cdot 2^x$;   2) $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$;   3) $y = 4e^{\sqrt{x}}$;   4) $y = 3e^{\sqrt{x+1}} \cdot x^2$;

5) $y = 3x^{10} - 4e^x$;   6) $y = 3\cos\dfrac{x}{x+1}$;   7) $y = 2^x \cdot \mathrm{ctg}\, 3^x$;   8) $y = 3e^{\frac{x+1}{2-x}}$

2. Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці:

1) $y = \dfrac{6x^4 - 7x^3}{2x^2}$, $x = 2$;   2) $y = \dfrac{5x^2}{x-3}$, $x = 1$

Варіант 4

1. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = 3e^x + x^3 - 1$;   2) $y = \dfrac{\mathrm{tg}\, x + 1}{\mathrm{tg}\, x - 1}$;   3) $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$;   4) $y = e^{3x} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$;

5) $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$;   6) $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$;   7) $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^{\sqrt[3]{3x+1}}$;   8) $y = e^{\cos x}$

2. Знайдіть другу похідну і обчисліть її значення в даній точці:

1) $y = 3x - \dfrac{6}{x^2}$, $x = 1$;   2) $y = \dfrac{x-1}{7x-4}$, $x = 1$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА

Завдання
для домашньої практичної роботи №3

Виконайте повне дослідження функції та побудуйте її графік.
При розв'язуванні завдання зверніть увагу на зразок оформлення рішення.

1) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$;   2) $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$;   3) $y = \dfrac{8x}{x^2 - 4}$;   4) $y = \dfrac{8x}{x^2 - 4}$;   5) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

6) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$;   7) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$;   8) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$;   9) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;   10) $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$;

11) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$;   12) $y = \dfrac{9x^2}{4 - x^2}$;   13) $y = x - \dfrac{1}{x}$;   14) $y = x + \dfrac{2}{x}$;   15) $y = x + \dfrac{4}{x^2}$;

16) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$;   17) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$;   18) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$;   19) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$;   20) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

21) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; 22) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; 23) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; 24) $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$; 25) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

<u>Приклад:</u> Дослідити функцію $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Областю визначення функції є об'єднання інтервалів $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Задана **функція має розрив в точці** $x=1$**.**

Перевіримо функцію на парність:

$y(-x)=\dfrac{2\cdot(-x)-1}{(-x-1)^2}=\dfrac{-2x-1}{(-x-1)^2}=-\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\neq -y(x)\neq y(x)$, **функція ні парна ні непарна**.

Знайдемо асимптоти графіка функції.

Перевіримо наявність *вертикальних* асимптот: $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty$.

Пряма $x=1$ **є вертикальною асимптотою**, тому що однобічні границі функції в точці розриву нескінченні

Перевіримо, чи має ця функція *похилі* асимптоти: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$**, похилих асимптот немає**.

Шукаємо *горизонтальні* асимптоти: $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$.

Пряма $y=0$ **буде горизонтальною асимптотою.**

Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

При $x=0$ маємо $y=-1$, тобто **точка** $M_0(0;-1)$ **– це точка перетину графіка з віссю** Oy**.**

При $y=0$ маємо $x=\frac{1}{2}$, тобто **точка** $M_1\left(\frac{1}{2};0\right)$ **є точкою перетину з віссю** Ox**.**

Знаходимо похідну: $y'=\dfrac{2(x-1)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3}=\dfrac{-2x}{(x-1)^3}$.

Похідна не існує в точці $x=1$ і дорівнює 0 при $x=0$. *Критичною точкою першого роду* буде лише точка $x=0$, тому що $x=1$ не належить області визначення функції.

Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву та критичної точки:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$y'(x)$	–	0	+	не існує	–
$y(x)$	$\searrow$	–1	$\nearrow$	не існує	$\searrow$
		min			

На інтервалі $(0;1)$ функція зростає, бо на цьому інтервалі $y'(x)>0$. На інтервалах $(-\infty;0)$ та $(1;+\infty)$ функція спадає, бо тут $y'(x)<0$. В точці $x=0$ функція має мінімум, бо при переході через цю точку похідна змінила знак з "–" на "+".

$$y_{\min}=y(0)=-1$$

Знайдемо інтервали опуклості графіка і точку перегину.

$$y''=\frac{-2(x-1)^3-(-2x)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{-2(x-1)^3+6x(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(x-1)^2(-(x-1)+3x)}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{2(3x-x+1)}{(x-1)^4}=\frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$$

$y''=0$, якщо $x=-\frac{1}{2}$ і не існує, якщо $x=1$. *Критичною точкою другого роду* буде лише точка $x=-\frac{1}{2}$, тому що $x=1$ не належить області визначення функції.

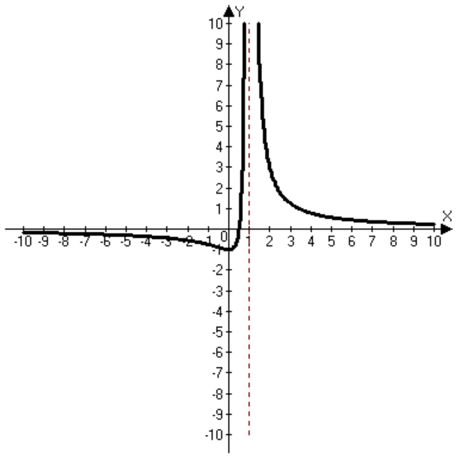
Складаємо таблицю з урахуванням точки розриву та критичної точки другого роду:

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$	не існує	$+$
$y(x)$	$\cap$	$-\frac{8}{9}$	$\cup$	не існує	$\cup$

На інтервалі $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ графік функції опуклий вгору, бо на цьому інтервалі $y''<0$. На інтервалах $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ та $(1;+\infty)$ графік опуклий вниз, бо на цих інтервалах $y''>0$. Точка $x=-\frac{1}{2}$ є точкою перегину, бо при переході через цю точку знак другої похідної змінився.

$$y_{пер}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{9}$$

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції.



ПОВНИЙ ПРИРІСТ ТА ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Математичний диктант
для поточного контролю за самостійною
роботою студентів

Варіант 1.

1. Повний приріст диференційовної в точці M функції записують у вигляді....
2. Повний диференціал функції визначають за формулою...
3. Повний диференціал функції $z = x^2 y - xy^2$ дорівнює...
4. Що означають складові частини виразу $dz = \ x^2 + y \ dx + xy^3 dy$?
5. Для обчислення максимального значення похідної за напрямом використовують формулу...

Варіант 2

1. Теорему про існування частинних похідних диференційовної функції у вигляді рівності можна записати так:...
2. Запишіть у вигляді рівності визначення повного диференціалу функції.
3. Повний диференціал функції $z = xy - 3y + 2x^2$ дорівнює...
4. Поясніть значення правої та лівої частини рівності

$$f \ \ x + \Delta x; \ y + \Delta y \ - f \ \ x; y \ = z'_x \ \ x; y \ \ dx + z'_y \ \ x; y \ \ dy$$

5. Для обчислення похідної за напрямом використовують формулу...

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ

Математичний диктант
для поточного контролю за самостійною
роботою студентів

Варіант 1

1. Основною відмінністю визначеного інтеграла від невизначеного є те, що....
2. Криволінійна трапеція це...
3. Визначений інтеграл з однаковими границями інтегрування...
4. Використовуючи властивості визначених інтегралів обчисліть

$$\int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^4 \frac{x}{2} dx$$

5. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^{1} \ 3x^2 - 5 \cdot 2^{2x} + \arccos x \ \ dx$

Варіант 2

1. Для обчислення визначених інтегралів використовують формулу...
2. Геометрично визначений інтеграл—це...
3. Якщо переставити границі інтегрування, то...
4. Використовуючи властивості визначених інтегралів обчисліть

$$\int_{0}^{\pi/4} \cos x \cdot dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \cdot dx$$

5. Обчисліть інтеграл $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \; 3x - \sin 2x + 4\cos x \;\; dx$

ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Завдання
для домашньої практичної роботи № 4

Розв’язати самостійно лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1) $y' - 2y + 3 = 0$;
2) $xy' + y = 3$;
3) $y' + y = e^x x$;
4) $\; 1 + x^2 \;\; y' - 2xy = 1 + x^2$, якщо $y = 2, \;\; x = 1$;
5) $y' + 2y = 4x$, якщо $x = 0, \;\; y = 2$

ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Завдання
для домашньої практичної роботи № 5

Розв’язати самостійно лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1) $y^2 dx + \;\; x^2 - xy \;\; dy = 0$, якщо $y = 1, \;\; x = 1$;
2) $y' \;\; x^2 + xy \;\; = y^2$, якщо $y = 2, \;\; x = 2$;
3) $x^3 dy - y \;\; x^2 + y^2 \;\; dx$, якщо $x = 1, \;\; y = 1$;
4) $\;\; x^2 + 2y^2 \;\; dx + 2xydy = 0$
5) $\;\; x + y \;\; dx + \;\; y - x \;\; dy = 0$

ПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЕКЗАМЕНУ

Лінійна алгебра

1. Матриці. Основні типи матриць

2. Правила дій з матрицями

3. Формула розкладання визначника за елементами рядка або стовпця. Обчисліть визначник, використовуючи записану формулу: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

4. Правила обчислення визначників другого та третього порядку. Обчисліть визначники

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

5. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника. Знайдіть алгебраїчні доповнення елементів визначника $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

6. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом. Розв'яжіть матричним методом систему $\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$.

7. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера., методом Гаусса. Розв'яжіть системи вказаними методами

$$1)\ \begin{cases} 3x+4y+7z=1 \\ -2x+5y-3z=1 \\ 5x-6y+11z=-3 \end{cases}; \qquad 2)\ \begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}.$$

8. Обернена матриця. Правила обчислення оберненої матриці. Знайдіть матрицю, обернену даній $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Аналітична геометрія

9. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $V_1\ \ -2;3$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=4\vec{i}-2\vec{j}$.

10. Складіть канонічне та загальне рівняння прямої, що проходить через точку $A\ \ -2;3$ паралельно вектору $\vec{s}\ \ 2;-1$.

11. Різні види рівнянь прямої на площині.

12. Визначення найпростіших кривих другого порядку. Їх рівняння.

13. Еліпс. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, $\varepsilon = 0,6$ та $2b = 10$.

14. Парабола. Парабола задається рівнянням $y^2 = -64x$. Знайдіть координати фокуса та рівняння директриси параболи.

15. Гіпербола. Знайдіть довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет та рівняння асимптот гіперболи, заданої рівнянням $3x^2 - 4y^2 = 24$.

Вступ до математичного аналізу

16. Границя функції в точці та на нескінченності. Властивості границь

17. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Властивості нескінченно малих та нескінченно великих величин

18. Способи обчислення границі функції в точці та на нескінченності. Обчисліть гранці:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4}{4x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

19. Неперервність функцій. Точки розриву

Диференціальне числення функції однієї змінної

20. Диференціювання функції. Основні формули диференціювання. Знайдіть похідні функцій

1) $y = \dfrac{1}{5}x^2 + \dfrac{2}{3}\sin 6x - \dfrac{1}{16}\cos 8x$; 2) $y = x^3 \cdot e^{-2x}$;

3) $y = \lg\sqrt{x^2+4}$; 4) $y = \;2x^3+5\;^{4}$.

21. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної. Їх використання при розв'язуванні задач

22. Похідна і диференціал. Похідні вищих порядків. Основні правила диференціювання. Знайдіть похідні другого та третього порядку функцій:

1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \;2x-3\;^{4}$; 3) $y = x \cdot \ln x$.

23. Умови зростання та спадання функції. Знайдіть інтервали монотонності функції $y = x^4 - 4x + 3$

24. Опуклість графіка функції. Точки перегину. Знайдіть точки перегину функції $y = 6x^2 - x^3$.

25. Екстремум функції. Необхідна і достатня умови існування екстремуму. Дослідіть на екстремум функцію $y = 2x^3 - x^2 - 4x + 5$

26. Загальна схема дослідження функції

Диференціальне числення функції багатьох змінних

27. Частинні похідні функції двох змінних. Знайдіть частинні похідні функцій 1) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$; 2) $z = \dfrac{y}{x} + x$ в точці $M(1;-2)$; 3) $z = x\ln y - y^2 \ln x$; 4)

$$z = (2x - 3y)^5$$

28. Частинні похідні другого порядку функції двох змінних. Знайдіть частинні похідні другого порядку функцій 1) $z = x^4 + xy^3 - y^2$; 2) $z = e^{-x+4y}$

29. Критичні точки функції двох змінних. Знайдіть критичні точки функції

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

30. Екстремум функції двох змінних. Необхідна та достатня умови існування екстремуму. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + xy + 3y^2 + 16x$

Інтегральне числення

31. Поняття первісної та невизначеного інтегралу. Основні властивості невизначеного інтегралу

32. Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтегралу та зв'язок з невизначеним інтегралом

33. Безпосереднє інтегрування функцій. Таблиця основних інтегралів. Проінтегруйте функції

$$1)\ \int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx; \quad 2)\ \int \frac{2x^2 + x - 1}{x}\, dx$$

34. Інтегрування методом заміни змінної в невизначеному та в визначеному інтегралі.
Знайдіть чи обчисліть інтеграли:

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}; \quad 2)\ \int_{-2}^{1} (x^2+1)^2 x\, dx; \quad 3)\ \int \sqrt[4]{(2-3x)^3}\, dx$$

35. Інтегрування частинами в невизначеному та в визначеному інтегралах. Знайдіть чи обчисліть інтеграли 1) $\int x \cdot \sin 2x\, dx$; 2) $\int_1^{e^2} \sqrt{2x} \cdot \ln x\, dx$.

36. Наближене обчислення визначених інтегралів. Обчисліть інтеграл $\int_1^6 x^2 dx$ за формулами прямокутників, трапецій, якщо $n = 5$

Диференціальні рівняння

37. Звичайні диференціальні рівняння. Основні визначення

38. Види диференціальних рівнянь першого порядку

39. Диференціальні рівняння з відокремленими та з відокремлюваними змінними. Принцип розв’язку. Знайти частинний розв’язок рівнянь:

1) $1+x^3\ \ dy=3x^2y\,dx$, якщо $y=2,\ x=0$; 2) $1+x^2\ \ y^3dx-\ \ y^2-1\ \ x^3dy=0$

40. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Знайдіть частинний інтеграл однорідного диференціального рівняння $(x-y)\,dx+x\,dy=0$, якщо $y=0$ при $x=1$

41. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Знайдіть частинний інтеграл лінійного диференціального рівняння $xy'-3y=x^4e^x$, якщо $y=e,\ x=1$

Ряди

42. Числові ряди. Основні визначення.

43. Запишіть перші п’ять членів ряду по заданому загальному члену:

1) $a_n=\dfrac{1}{4n^2+1}$; 2) $a_n=\dfrac{2^n}{n!}$.

44. Знайдіть формулу загального члену ряду:

1) 2+4+8+16+…; 2) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+...$

45. Ознаки збіжності знакопостійних рядів. Дослідіть на збіжність за допомогою ознаки Д’Аламбера ряд $10+\dfrac{10^2}{2^2}+\dfrac{10^3}{3^2}+...+\dfrac{10^n}{n^n}+...$

46. Степеневий ряд. Властивості степеневих рядів.

47. Розклад функції в степеневий ряд. Ряд Маклорена.

48. Розкладіть в ряд Маклорена функції:

1) $f\ \ x\ =3^x$; 2) $y=\ln\ 1+6x$; 3) $y=\sin 2x$.