УДК 005.517.9

Диференціальний і інтегральний методи розв’язування фізичних задач у середній школі

Укладачі:
Сидоренков Є.Є., учитель фізики 1 категорії «КЗО СЗОШ № 19», м. Дніпропетров-ськ ;
Олевська Ю.Б., канд. фіз. мат. наук, ДВНЗ НГУ.

Передмова

Фізика і математика у школі і ВНЗ вивчаються як окремі дисципліни за планами, що складені відповідно до вимог нормативно-методичних документів. Терміни вивчення у школі таких розділів математики, як «Похідна функції» та «Невизначений інтеграл» є такими, що не залишають учням достатнього часу для набуття стійкого уміння використовувати свої знання математики для рішення фізичних задач [1]. Можливість практичного використання своїх знань матаналізу учні, а потім і студенти, отримують лише, вивчаючи теоретичну механіку, електротехніку, опір матеріалів та інші дисципліни, на старших курсах ВНЗ. Таким чином, спостерігається відсутність «освітнього простору» для формування у учнів навичок розв’язування фізичних задач методами інтегрального і диференціального обчислення у школі і на 1-2 курсах ВНЗ.

Разом з тим, використання своїх знань математики у рішенні фізичних задач - це справжнє задоволення для учня або студента, такий процес викликає емоційний підйом, збільшує повагу до себе як суб’єкта освітнього процесу[2]. Не слід забувати і суто історичні аспекти виникнення і розвитку математики як прикладної науки.

Зважаючи на вищевказане, автори ставлять собі за мету розробити цикл факультативних уроків на тему: «Диференціальний і інтегральний методи розв’язування фізичних задач у середній школі». Такі уроки нададуть можливість учням оволодіти стійкими навичками прикладного використання елементів диференціального і інтегрального обчислення.

Факультативні уроки розробляються за формою методичних вказівок[3] і тренувальних вправ. Типові задачі розподіляються за методами розв’язування, а не за розділами фізики. Така класифікація задач надає можливість оцінити універсальність використання математичних методів.

Фізика. 11 клас .

Факультативне заняття №1 .

Тема: Інтегральний метод (ІМ) розв’язування задач.

Мета: Ознайомитись з (ІМ), сформувати навички використання ІМ при розв’язуванні типових фізичних задач.

Тип уроку: Закріплення знань, формування умінь і навичок.

Теоретичні відомості про ІМ.

Інтегральний метод не є абсолютним у своєму використанні . Як відомо, не є абсолютним і зміст фізичних законів і вони також мають межі свого використання. За допомогою ІМ можливо подовжити межу використання фізичного закону, змінивши форму запису. Така дія можлива при виконанні двох умов: можливість представлення закону у диференціальній формі і можливість використання принципу суперпозиції (адитивності) до розглянутих фізичних величин [4].

Суттєвий зміст ІМ полягає у наступному.

Припустимо, що маємо фізичний закон або визначення пропорційної залежності фізичних величин (закон Гука, Ома для ділянки електричного кола, визначення сили струму, роботи тощо):

$A = F \cdot s$ (1), де A, F, s - фізичні величини.

Умовою використання такої залежності має бути: F=const. Як розширити межі використання залежності (1) при невиконанні такої умови, якщо маємо функціональну залежність F(s) ≠ const, як показано на рис.1.

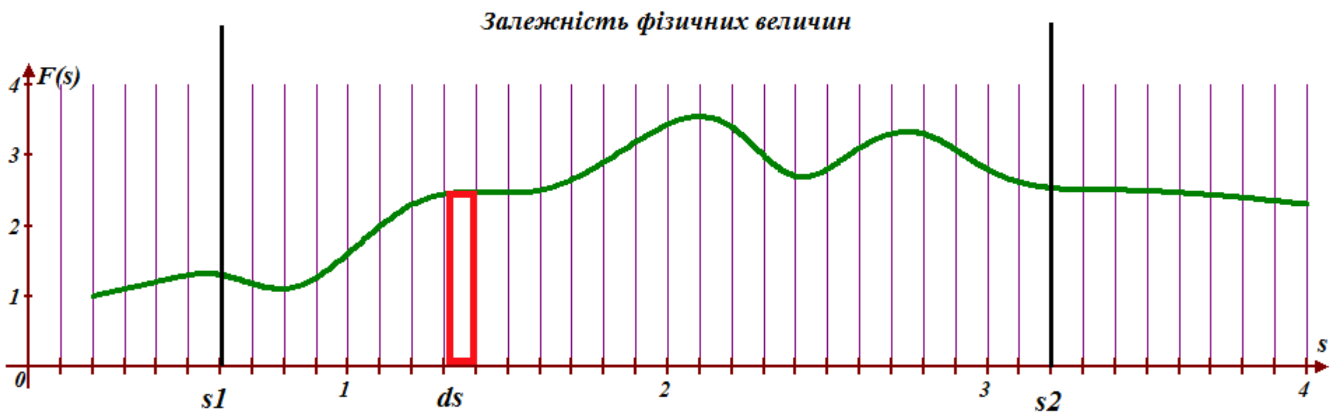

Рис. 1. Функціональна залежність фізичних величин.

Виділяється малий інтервал зміни фізичної величини s, який позначаємо ds, на якому фізична величина F=const відповідає вимогам щодо використання рівняння (1). При використанні (1) на інтервалі ds маємо зміну фізичної величини A :

dA = Fds (2).

За принципом суперпозиції додаємо частки dA на усіх ділянках ds від s_1 до s_2 (дивись рис.1):

$A=\int_{s1}^{s2} Fds$ (3).

Таким чином, маємо два етапи використання ІМ:

1). Отримання виразу для диференціала фізичної величини dA шляхом розбивання фізичного процесу на малі проміжки (часу, частинки тіла або простору) ds, на яких процес можна розглядати як квазістаціонарний або рівномірний;

2). Додавання або інтегрування.

Найбільш важливим є здібність учня визначити змінну величину, за якою буде відбуватися інтегрування, а також значення меж інтегрування.

Після визначення інтегралу отримують значення фізичної величини, що розраховується .

Розглянемо рішення відомої з восьмого класу задачі : *визначити роботу, що виконується при забиванні цвяха довжиною s=10 см у дошку товщиною L=30 см, якщо при витягуванні забитого цвяха з дошки треба на початку прикласти силу* F_0 *=40 Н.*

Розв'язування задачі у восьмому класі відбувалось графічним способом: оскільки сила тертя дорівнює силі, що діє на цвях при забиванні, будувався графік залежності сили від довжини забитого у дошку цвяха, розраховувалась площа під графіком сили (рис.2), яка дорівнює роботі, що

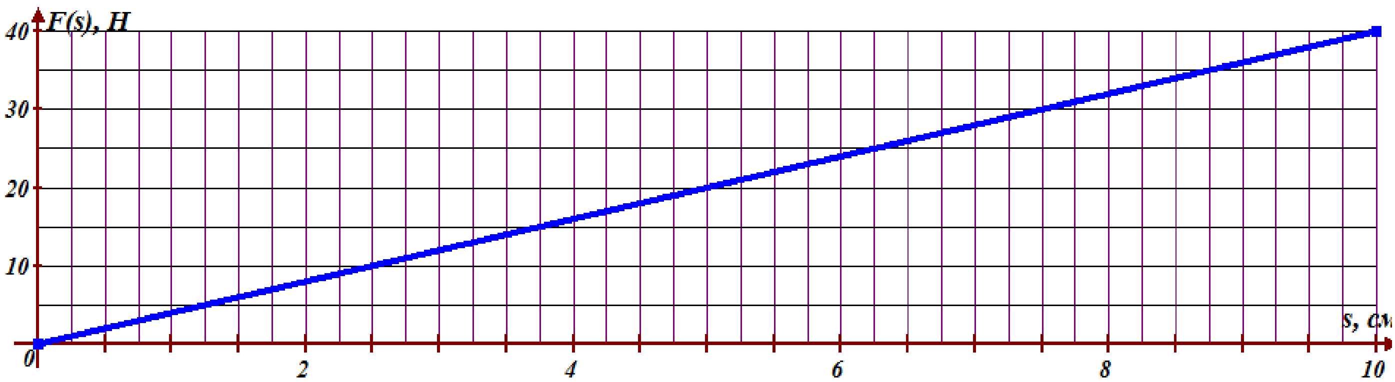

Рис. 2. Залежність сили від довжини.

виконувалась. Розрахунок площі трикутника можна отримати скориставшись формулою: $A = \frac{F_0}{2} \cdot s$, підставивши значення отримаємо значення роботи:

$$A = \frac{40\ \text{Н}\cdot 0{,}1\text{м}}{2} = 2\ \text{Дж} \qquad (4).$$

Рішення задачі з використанням ІМ має наступний вигляд.

Використовуючи рівняння роботи як скалярного добутку сили і переміщення, на якому виконується робота, знаходимо диференціал А:

$$dA = F\,ds \qquad (5).$$

Сила тертя цвяха об дошку на усіх відрізках руху згідно графіка (рис.2) пропорційна глибині проникнення цвяха у дошку :

$$F = ks \qquad (6).$$

За графіком отримуємо значення k = $\frac{40\ Н}{10\ см} = 400\ \frac{Н}{м}$. Таким чином, для розрахунку роботи інтегруємо (5) з урахуванням (6):

$$A = k\int_0^{0,1} s\,ds = k\frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1} = 400\frac{Н}{м}\cdot\frac{0{,}01\ м^2}{2} = 2\ Дж \quad (7).$$

Результати (4) і (7) співпадають.

Для отримання навичок використання ІМ учням пропонується самостійно розв'язати наступні задачі.

1. У компресорі дуже повільно (ізотермічно) стискається 240 г He від об'єму 200 дм^3 до 5дм^3. Визначити роботу стискання, якщо температура газу дорівнює 23 C^0 .

Для перевірки результатів самостійної роботи учнів використовуємо наведене нижче рішення. Газ розглядається як ідеальний.

Позначимо початковий і кінцевий об'єми V_1 і V_2 відповідно,масу газу m, температуру T. Роботу у термодинаміці розраховують, як площу під графіком залежності P(V) у координатах PV(рис.3).

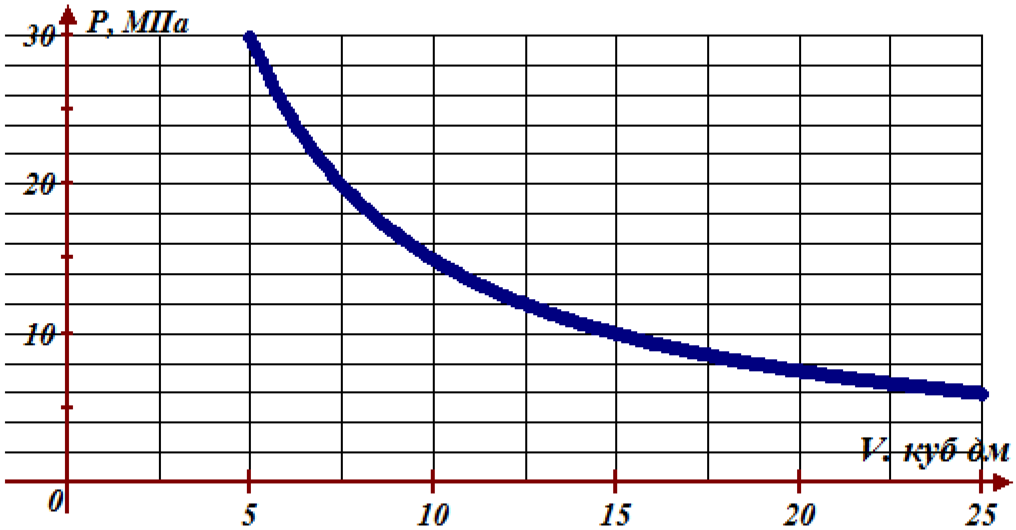

Рис. 3. Залежність P(V) при ізотермічному процесі.

Використовуючи рівняння Мендєлєєва – Клапейрона :

$P\cdot V = \nu RT$, де ν- кількість газу у молях, R= 8,31 $\frac{Дж}{моль\ K}$ - універсальна газова стала, T – температура газу у градусах за шкалою Кельвіна. За умовами задачі ліву частину рівняння можна обчислити як сталу величину:

$$\nu RT = \frac{mRT}{\mu} = \frac{240г\cdot 8{,}31\frac{Дж}{моль\ K}\cdot 300K}{4\frac{г}{моль}} = 149580\ Дж \quad (8).$$

Таким чином, P·V= 149580 Дж = C має розмірність роботи. Вибираючи малу величину dV на осі V і відповідне значення P= $\frac{C}{V}$, маємо диференціал роботи: $dA = \frac{C}{V}dV$ (9).

Залишилось інтегрувати (9) у межах від V_1 до V_2 :

$A = C\int_{V1}^{V2}\frac{dV}{V} = C\,ln|V||_{V1}^{V2} = 149580\text{Дж}\,ln|195\cdot 10^{-3}| = -244{,}5\ \text{КДж}$

(10).

Значення роботи від’ємне тому, що роботу виконували над газом зовні.

Задача з електростатики .

2.Маємо заряджену зарядом Q= 1,2 мкКл тонку нитку довжиною L= 2м . Визначити потенціал у точці простору, яка позначена на рис.4 буквою N. Відстані s=2,4м,d=1м.

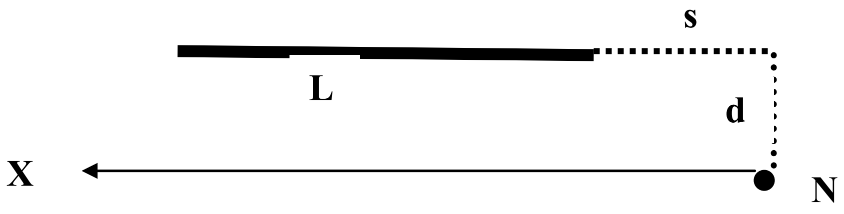

Рис.4. Заряджена нитка.

Як відомо, у цьому розділі фізики є фізичні величини, які підкорюються принципу суперпозиції: напружність, потенціал, заряд.

Рішення задачі.

Зв’яжемо точку N з початком координатної осі X. Відомо, що потенціал точки простору, де електричне поле наведене точковим зарядом, можна розрахувати за формулою : $\varphi = k\frac{Q}{R}$, де $k = 9\cdot 10^9\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ - відома електростатична константа, Q- значення точкового заряду, R- відстань від заряду Q до точки N.

За змістом першого етапу ІМ розіб’ємо заряджену нитку на точки dx. Заряд кожної з таких точок можна вважати $dQ = \frac{Q}{L}dx$. Кожний з таких точкових зарядів є джерелом електричного поля. Потенціал від кожного такого заряду в точці N можна розрахувати за формулою:

$d\varphi = k\frac{dQ}{\sqrt{d^2 + x^2}} = k\frac{Q}{L}\frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$.

Таким чином, отримали диференціал фізичної величини, що розраховується.

Другий етап ІМ полягає у визначенні меж інтегрування і пошуку значення визначеного інтеграла. Межами інтегрування можна вважати координати точок зарядженої нитки: нижня межа – координата s, верхня межа – (s+L).

$\varphi = k\frac{Q}{L}\int_s^{s+L}\frac{dx}{\sqrt{d^2+x^2}} = k\frac{Q}{L}ln\left|x + \sqrt{x^2 + d^2}\right|_s^{s+L}$;

$\varphi = 9\cdot 10^9\,\frac{1{,}2\cdot 10^{-6}}{2}\,ln\left|x + \sqrt{x^2 + 1}\right|_{2{,}4}^{4{,}4} = 5400\,ln\left|\frac{4{,}4+\sqrt{5{,}4}}{2{,}4+\sqrt{3{,}4}}\right| =$

$= 5400\ln|1{,}6| = 2538$.

Відповідь: потенціал у точці N дорівнює $\varphi = 2538$ В.

Задача на використання закону радіоактивного розпаду.

3.Бета радіоактивний ізотоп цезію $^{123}_{55}Cs$ має період напіврозпаду 6 хвилин. Під час аварії на атомній станції Фукусіма-1 викид ізотопу склав 2000 кг. Розрахувати кількість цезію, що залишається радіоактивним через одну годину після аварії. Через який час залишиться 10 відсотків радіоактивних атомів?

Рішення задачі.

За законом радіоактивного розпаду кожний ізотоп має час напіврозпаду T, за який розпадається половина усіх радіоактивних атомів.

Загальну кількість атомів радіоактивного ізотопу позначимо N_0, кількість атомів, що не розпалися за годину , позначимо N. Таким чином, розрахувавши $\frac{N}{N_0}$, отримаємо рішення задачі.

Позначимо dt малий відрізок часу, за який розпадається dN кількість ізотопів. Кількість розпадів за одиницю часу (активність ізотопу) $\frac{dN}{dt}$ зменшується з часом, оскільки загальна кількість атомів N, що не розпалися, зменшується. З іншого боку $\frac{dN}{dt}$ пропорційна поточній кількості радіоактивних атомів N з коефіцієнтом пропорційності λ, який називають сталою радіоактивного розпаду ізотопу.

Таким чином:

$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$ (11), де знак « мінус» означає зменшення кількості dN за рівні проміжки часу dt.

Маємо рівняння з диференціалами змінних величин:

$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{N}} = -\lambda \mathrm{dt}$ (12).

Інтегруючи (12), $\int \frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{N}} = -\int \lambda \mathrm{dt}$, отримаємо:

$\ln N = -\lambda t + C$ (13), де C - стала інтегрування. Сталу C маємо розрахувати, якщо узяти до уваги значення $N=N_0$ при t=0. Таким чином, : $\ln N_0 = C$.

Рівняння (13) буде мати вигляд: $\ln N = -\lambda t + \ln N_0$.

Результатом перетворення рівняння (13) стане закон радіоактивного розпаду:

$N = N_0\, e^{-\lambda t}$ (14).

З фізичного змісту T маємо: $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, оскільки при t=T $N = \frac{1}{2} N_0$.

Таким чином , з $\ln\ 2 = \lambda T$ витікає:

$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$ (15).

Розрахунок λ для нашої задачі дає: $\lambda = \frac{0{,}693}{360c} = 0{,}001925c^{-1}$. За умовами задачі можна обчислити межі інтегрування (12): нижня t=0с, верхня t=1год = 3600 с.

Обчислення N можна зробити за формулою (14) . Для цього обчислимо добуток $\lambda t = 0{,}001925\ c^{-1} \cdot 3600\ c = 6{,}93$.

Обчислення $N_0 = \frac{m}{\mu} N_A = \frac{2000000г}{123\frac{г}{моль}} 6{,}02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1} = 9{,}8 \cdot 10^{27}$, де m – маса ізотопу, μ- молярна маса, N_A- число Авогадро.

Обчислення $e^{6{,}93} = 1046$.

Таким чином, обчислення $N = \frac{N_0}{e^{\lambda t}} = \frac{9{,}8 \cdot 10^{27}}{1046} = 0{,}00937 \cdot 10^{27}$. Робимо висновок, що розпалося радіоактивних атомів $\Delta N = N_0 - N = 9{,}79063 \cdot 10^{27}$.

Відносний показник залишку радіоактивних атомів через одну годину:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{0{,}00937}{9{,}8} = 0{,}001.$$

Таким чином, через одну годину залишиться приблизно одна десята відсотка усієї кількості радіоактивних атомів ізотопу ${}^{123}_{55}Cs$.

Для пошуку часу розпаду 90% радіоактивних атомів маємо рівняння (14) у вигляді:

$0{,}9N_0 = \frac{N_0}{e^{\lambda t}}$;

$e^{\lambda t} = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}11$;

$\lambda t = \ln 1{,}11$;

$0{,}001925t = 0{,}1$;

$t = \frac{0{,}1}{0{,}001925} = 54{,}7с$.

Таким чином, для розпаду 90% радіоактивного ізотопу достатньо 54,7 с часу.

4. Визначити коефіцієнт поглинання світла α речовини прозорої пластини товщиною 20 см, якщо при проходженні світла через пластину інтенсивність випромінювання зменшується на 60% .

Рішення задачі.

Нехай на пластину падає промінь світла інтенсивністю випромінювання I_0. Після виходу із пластини променя інтенсивність випромінювання дорівнюватиме відповідно $0{,}4I_0$. При проходженні світла у пластину кожна ділянка пластини товщиною dx, яка перпендикулярна напрямку розповсюдження світла, поглинає частку енергії променя, що зменшує його інтенсивність на -dI . Таке зменшення інтенсивності пропорційне інтенсивності I променя, що падає на ділянку, коефіцієнту поглинання речовини α і товщині dx ділянки пластини. Знак мінус показує зменшення інтенсивності променя з ростом dx. Таким чином складається рівняння:

$$-dI = I\alpha dx \qquad (15).$$

Розділивши величини, отримаємо:

$$-\frac{dI}{I} = \alpha dx \qquad (16).$$

Інтегруючи (16) отримаємо:

$\ln I = -\alpha x + \ln I_0$, з якого витікає: $I = I_0 e^{-\alpha x}$ (17).

Рівняння (17) має назву закона Бугера [5] .

За умовою задачі: $e^{-\alpha x}$ = 0,4. Роз’язуючи таке рівняння відносно α, маємо: $-\alpha x = -0{,}916$. Таким чином, отримаємо відповідь : $\alpha = 4{,}58\ \text{м}^{-1}$.

Для домашнього завдання підібрані задачі, які розв’язуються методом ІМ.

1.Електричний заряд Q відштовхує заряд q з точки А у точку В, які розміщені на одній лінії на відстані 30 см і 90 см від Q відповідно. Визначити роботу сили такого відштовхування, якщо Q= 12мкКл, q= 120 нКл.

2.Електричний ланцюг має напругу на клемах джерела струму 300 В і сталий опір 120 Ом. Послідовно з опором підключений реостат. Який заряд пройде по електричному колу за одну хвилину, якщо опір реостату буде кожну секунду збільшуватись на 4 Ом? Початковий опір реостату дорівнює нулю.

3.Посудина з водою отримала 400 КДж теплоти і починає її втрачати. За першу хвилину було втрачено 100 Дж теплоти. Визначити кількість теплоти, що залишиться у посудині через 30 хвилин, якщо швидкість втрати теплоти пропорційна наявній кількості теплоти у посудині.

Література.

1. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів,10-11 класи/ ММЦ м. Дніпропетровська, електронний посібник БУМ 12- 4,7 Гб.

2.Котляр Б.Д. Какой курс математики необходим будущему горняку, механику, електрику?/Котляр Б.Д.- Сборник научных трудов НГА Украины №3, Том7. Экономика горных предприятий, менеджмент и маркетинг. Финансовые аспекты развития экономики Украины. Проблемы профессиональной подготовки кадров для горной промышленности в национальной системе,- Днепропетровск; РИК НГА Украины, 1998- 264с.

3.Кагалдій Т.С. Методичні вказівки до розв’язування прикладних задач з вищої математики / Кагалдій Т.С.- Дніпропетровськ, НГУ, 2005-29с.

4.Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы/ Беликов Б.С.- М. Высшая школа,1986-256с.

5.Пинский А.А.Физика с основами электротехники/ Пинский А.А., Граковский Г.Ю.- М., Высшая школа 1985-384с.