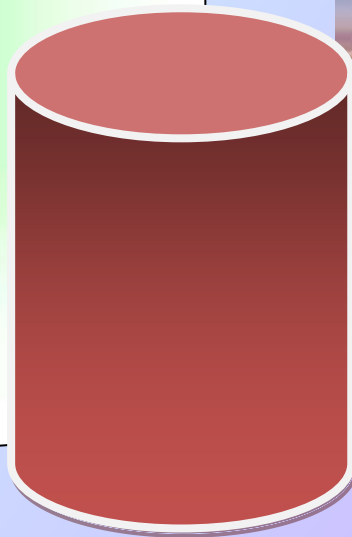
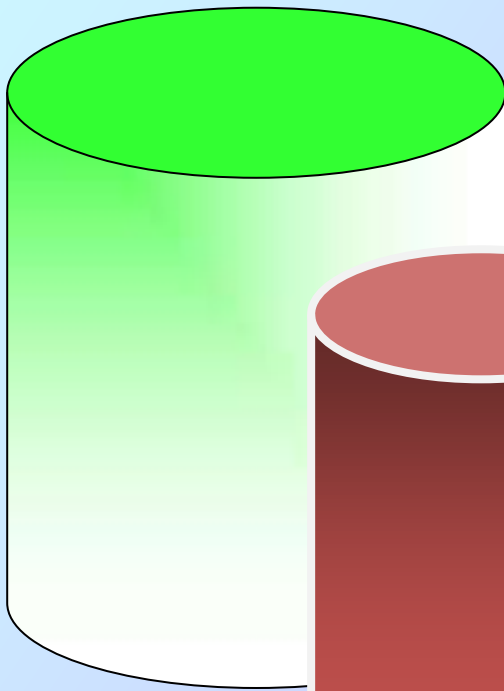


Циліндр у повсякденному житті



Зміст

1. Передмова.....	3
2. Використання циліндра у повсякденному житті.....	4
3. Циліндр та його властивості.....	6
4. Розв’язування задач.....	9
5. Задачі для самостійної роботи.....	16
6. Список використаної літератури.....	17

Передмова

Математика є важливим засобом формування в учнів системи знань та навичок, необхідних їм для повноцінного життя у суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів, явищ навколишнього світу. Формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів.

Після приголомшливих досліджень PISA, яке засвідчило низький рівень математичних компетентностей у наших школярів, президентом було підписано наказ «Про оголошення 2020/2021 навчального року Роком математичної освіти в Україні», за яким серед обов'язкових є такі заходи:

- впровадження у навчання сучасних практико-орієнтованих засад, у тому числі з використанням ресурсів PISA, підвищення якості навчально-методичного забезпечення вивчення математики, зокрема підручників та навчальних посібників з математики;
- розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;
- створення умов для підвищення мотивації здобувачів освіти з успішного оволодіння математичними знаннями і навичками, їх застосування у соціальній, економічній, технологічній, науковій та інших сферах суспільного життя.

Саме тому даний збірник містить у собі перелік нестандартних задач, які математично змодельовані та спрямовані для розвитку кращого уявлення про використання циліндра у повсякденному житті.

Збірник рекомендовано використовувати як дидактичний матеріал на уроках геометрії, так і в позакласних заняттях, факультативах.

Використання циліндра в повсякденному житті

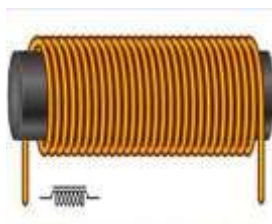
Циліндр у природі



Циліндр у побуті



Циліндр в техніці

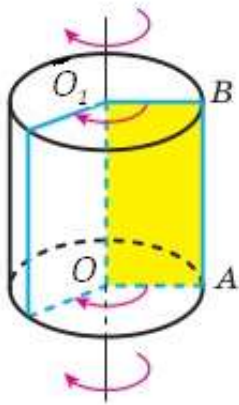


Циліндр в архітектурі



Циліндр та його властивості

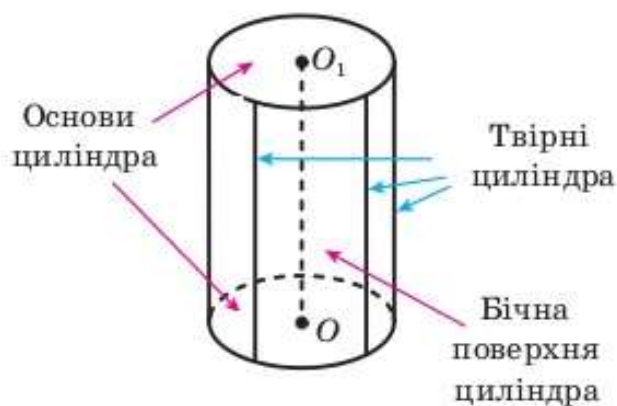
Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони.



На рис. зображено циліндр, утворений обертанням плоского прямокутника $OABO_1$ навколо прямої OO_1 — **осі циліндра**.

Сторони OA і O_1B описують рівні круги, які лежать у паралельних площинах і називаються **основами циліндра**. Радіуси кругів називаються **радіусами** циліндра.

Сторона AB описує поверхню, яка називається **бічною поверхнею** циліндра. Відрізки бічної поверхні, які паралельні й дорівнюють AB , називаються **твірними** циліндра.



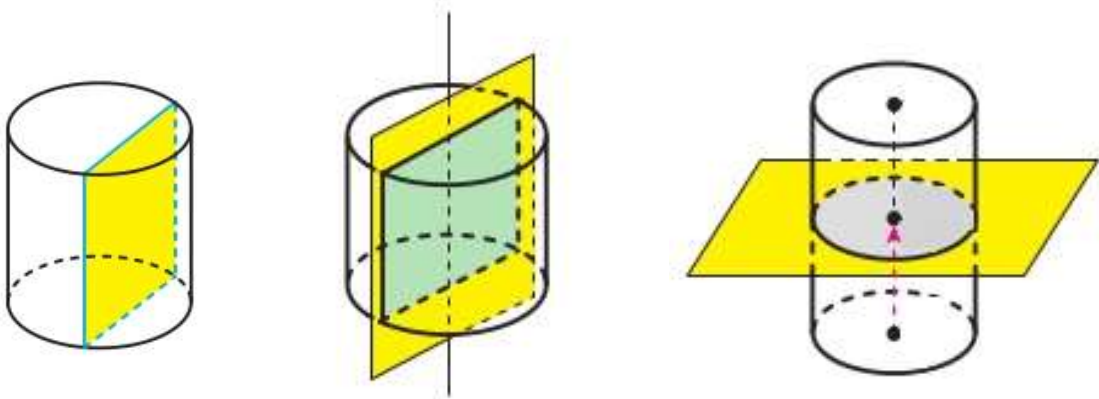
Висотою циліндра називається відрізок, перпендикулярний до основ, циліндра, кінці якого належать основам. Висота циліндра дорівнює його твірній.

Перерізи циліндра площиною

Перерізом циліндра площиною, яка проходить через дві твірні є прямокутник.

Осьовий переріз циліндра — прямокутник зі сторонами, що дорівнюють висоті циліндра й діаметру його основи.

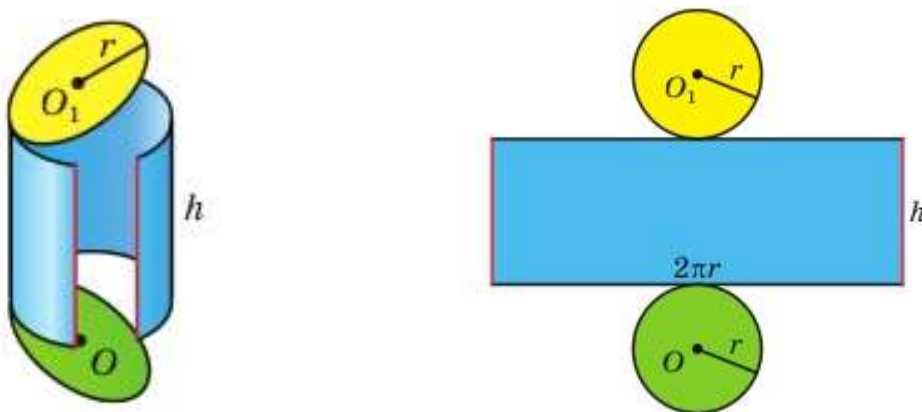
Перерізом циліндра площиною, паралельною основам (або перпендикулярною до осі циліндра), є круг, що дорівнює основі.



Площа поверхні та об'єм циліндра

Поверхня циліндра складається з двох рівних основ і бічної поверхні.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і одній із твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо розгортку циліндра. Вона складається з прямокутника, сторони якого дорівнюють довжині кола основ і висоті циліндра, і двох кругів, що є основами циліндра.



Площею бічної і повної поверхні циліндра називають площу розгортки бічної і повної поверхонь.

Тоді площа бічної поверхні $S_{\text{бічн}}$ і площа повної поверхні $S_{\text{цил}}$ визначаються формулами:

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH,$$

$$S_{\text{цил}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R),$$

де R , H — радіус і висота циліндра відповідно.

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Якщо радіус основи циліндра дорівнює R , а висота H , то його об'єм

$$V = \pi R^2 H.$$

Розв'язування задач

Досвід показує що під час вивченні шкільного курсу геометрії учні краще засвоюють теоретичну частину, коли розглядаються задачі пов'язані з математичним моделюванням. Це стосується також і теми «Циліндр та його властивості»

Розглянемо декілька задач пов'язаних з математичним моделюванням. Такі задачі розвивають просторову уяву учнів краще ніж стандартні геометричні задачі на обчислення площі поверхні та об'єму циліндра.

Задача № 1

Циліндрична бочка має висоту 1м і діаметр основи 80см. Чи вміститься в такій бочці 500л води?



Дано: циліндр ($OO_1; R$), $OO_1 = H$;
 $H = 1$ м, $D = 80$ см

Знайти: чи $V \geq 500$ л?

Розв'язання

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 \cdot H = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot H,$$

$$V \approx 3,14 \cdot \left(\frac{0,8}{2} \right)^2 \cdot 1 \approx 0,5024 \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$0,5024 \text{ м}^3 = 502,4 \text{ дм}^3 = 502,4 \text{ л}$$

Оскільки $502,4 \text{ л} > 500 \text{ л}$, то в бочці, що має висоту 1м і діаметр основи 80см, вміститься 500 л води.

Відповідь: так, вміститься

Задача № 2

Визначити місткість зернового елеватора, який має 50 резервуарів циліндричної форми з розмірами висота - 45 м, діаметр основи – 8м. Об'ємна маса зерна 0,8 т.



Дано: циліндр ($OO_1; R$), $OO_1 = H$;
 $H = 45$ м, $D = 8$ м; $n = 50$,
 $m_{\text{об'ємна}} = 0,8$ т
 $V_1 = 50V$

Знайти: місткість елеватора

Розв'язання

Якщо $m_{\text{об'ємна}} = 0,8$ т, то в 1 м^3 міститься 0,8 т зерна. Маємо:

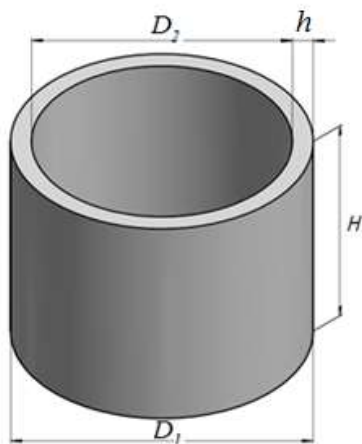
$$m \cdot V_1 = m \cdot n \cdot S_{\text{осн}} \cdot H = mn\pi R^2 \cdot H = mn\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H,$$

$$m \cdot V_1 \approx 0,8 \cdot 50 \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot 45 \approx 90432 \text{ (т)}.$$

Відповідь: 90432 т

Задача № 3

Знайдіть масу десятиметрової труби діаметром 1420 мм, яку зроблено зі сталюого листа завтовшки 22 мм. Маса 1 м^3 сталі 7600 кг.



Дано: циліндри ($OO_1; R_1$), ($OO_1; R_2$),
 $OO_1 = H$; $H = 10$ м,
 $D_1 = 1420$ мм,
 $D_2 = D_1 - h$;
 $h = 22$ мм, $1 \text{ м}^3 - 7600$ кг,

Знайти: масу труби

Розв'язання

R_1 – радіус зовнішнього циліндра;

R_2 – радіус внутрішнього циліндра.

$$V_1 = \pi R_1^2 H,$$

$$R_1 = \frac{1420}{2} = 710(\text{мм}) = 0,71 (\text{м})$$

$$V_2 = \pi R_2^2 H,$$

$$R_2 = 0,71 - 0,022 = 0,688 (\text{м}).$$

Тоді об'єм труби дорівнює:

$$V = V_1 - V_2,$$

$$V = \pi R_1^2 H - \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 - R_2^2) = \pi H(R_1 - R_2)(R_1 + R_2),$$

$$V = 3,14 \cdot 10 \cdot 0,022 \cdot 1,442 \approx 0,996 \approx 1(\text{м}^3).$$

$$M = 7600 \cdot 1 = 7600 (\text{кг}) = 7,6 (\text{т}).$$

Відповідь: 7,6 т.

Задача № 4

Скільки кілограмів фарби необхідно, щоб пофарбувати колону циліндричної форми, якщо діаметр її основи дорівнює 42 см, висота – 3,5 м? Відомо, що на один квадратний метр поверхні колони витрачається 250 г фарби.



Дано: циліндр (OO_1 ; R),
 $OO_1 = H$; $H = 3,5$ м,
 $D = 42$ см,
 $1 \text{ м}^2 - 0,25$ кг,

Знайти: масу фарби

Розв'язання

$$H = 3,5 \text{ м}, d = 0,42 \text{ м}, S = 2\pi RH = \pi DH.$$

$$\text{Звідси: } S = 3,14 \cdot 0,42 \cdot 3,5 \approx 4,62 (\text{м}^2).$$

Отже, для фарбування колони фарби потрібно: $4,62 \cdot 0,25 \approx 1,155$ (кг).

Відповідь: 1,155 кг.

Задача № 5

Яка найменша кількість плівки, потрібної для обклеювання зорової труби телескопа, що складається з двох циліндрів різного розміру, якщо один з них має довжину 31,5 см і зовнішній діаметр 5,4 см, а інший, довжиною 8,5 см, має зовнішній діаметр 8 см? Яка вартість такого оздоблення, якщо 1 м такої плівки, шириною 0,45 м, коштує 124 грн.(вважаємо, що поверхня одного циліндра обклеюється цільним шматком плівки)?



Дано: циліндри $(OO_1; R_1)$, $(O_2O_3; R_2)$,
 $OO_1 = H_1$; $H_1 = 31,5$ см,
 $O_2O_3 = H_2$; $H_2 = 8,5$ см
 $D_1 = 5,4$ см,
 $D_2 = 8$ см;
1 м – 124 грн.(при ширині – 0,45м)

Знайти: кількість плівки, вартість

Розв'язання

1. Визначаємо розміри прямокутника, що відповідає розгортці бічної поверхні довшої труби:

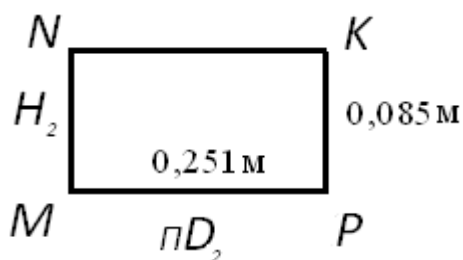
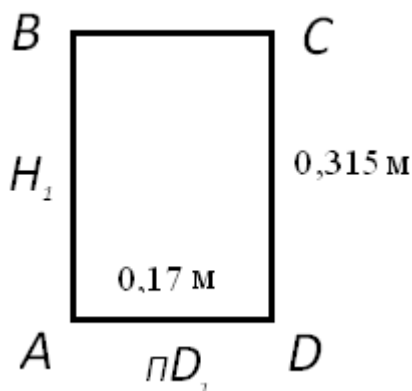
$$AB = H_1 = 0,315 \text{ м}, D_1 = 0,054 \text{ м},$$

$$AD = \pi D_1 \approx 3,14 \cdot 0,054 \approx 0,170 \text{ (м)}$$

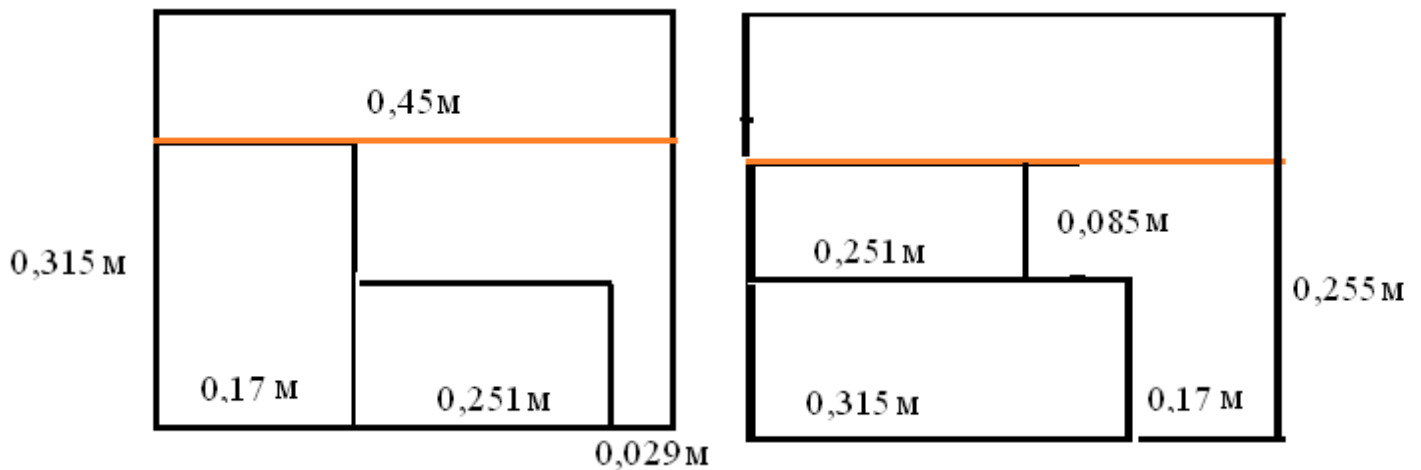
2. Визначаємо розміри прямокутника, що відповідає розгортці бічної поверхні коротшої труби:

$$MN = H_2 = 0,085 \text{ м}, D_2 = 0,08 \text{ м},$$

$$NK = \pi D_2 \approx 3,14 \cdot 0,08 \approx 0,251 \text{ (м)}$$



При ширині плівки 0,45 м можливі такі варіанти розкладки



Отже, найменша довжина плівки, яку потрібно придбати для обклеювання зорової труби телескопа $0,255 \text{ м} \approx 0,26 \text{ м}$. Розрахуємо вартість такої плівки:

$$124 \cdot 0,26 = 32,24 (\text{грн.})$$

Відповідь: 0,26 м; 32, 24 грн.

Задача № 6

Скільки потрібної лаку для покриття зорової труби телескопа, якщо на 1 м^2 поверхні витрачається 0,2 кг лаку, а складається поверхня з двох циліндрів різного розміру (один з них має довжину 31,5 см і зовнішній діаметр 5,4 см, а інший, довжиною 8,5 см, має зовнішній діаметр 8 см)?



Дано: циліндри $(OO_1; R_1)$, $(O_2O_3; R_2)$,
 $OO_1 = H_1$; $H_1 = 31,5 \text{ см}$,
 $O_2O_3 = H_2$; $H_2 = 8,5 \text{ см}$
 $D_1 = 5,4 \text{ см}$,
 $D_2 = 8 \text{ см}$;
 $1 \text{ м}^2 - 0,2 \text{ л}$

Знайти: кількість лаку

Розв'язання

Обчислюємо площі поверхонь обох циліндрів:

$$H_1 = 0,315 \text{ м}, D_1 = 0,054 \text{ м}, S_1 = 2\pi R_1 H_1 = \pi D_1 H_1.$$

Звідси: $S_1 = 3,14 \cdot 0,315 \cdot 0,054 \approx 0,0534 \text{ (м}^2\text{)}.$

$$H_2 = 0,085 \text{ м}, D_2 = 0,08 \text{ м}, S_2 = 2\pi R_2 H_2 = \pi D_2 H_2.$$

Звідси: $S_2 = 3,14 \cdot 0,085 \cdot 0,08 \approx 0,0214 \text{ (м}^2\text{)}.$

$$S = S_1 + S_2 = 0,0534 + 0,0214 = 0,0784 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Отже, потрібна кількість лаку $0,0784 \cdot 0,2 \approx 0,015 \text{ (л)}.$

Відповідь: 0,015 л

Задача № 6

30 л меду зберігалося у діжці циліндричної форми висотою 50 см. Протягом року мед використовували для випічки і його рівень знизився на 34 см. Скільки літрів меду залишилося у діжці?



Дано: циліндр ($OO_1; R$), $OO_1 = H$;

$H = 50 \text{ см}, V = 30 \text{ л};$

$H_1 = H - 34 \text{ см}$

Знайти: V_1

Розв'язання

$$H_1 = H - 34 \text{ см} = 50 \text{ см} - 34 \text{ см} = 16 \text{ см}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 30 \text{ л} - 50 \text{ см} & \uparrow \\ & x \text{ л} - 16 \text{ см} & \end{array}$$

$$x = \frac{30 \cdot 16}{50};$$

$$x = 9,6$$

Відповідь: 9,6 л меду залишилося у діжці.

Задача № 7

Було виготовлено два торти циліндричної форми заввишки 14 см. Діаметр основи одного з них 42 см, а другого втричі менший. Визначте у скільки разів один з них важчий за другий?



Дано: циліндри (OO_1 ; R), (O_2O_3 ; R_1),
 $OO_1 = O_2O_3 = H = 14$ см;
 $D = 42$ см,
 $D_1 = D : 3$

Знайти: $\frac{m}{m_1}$

Розв'язання

$$m = \rho V, \quad m_1 = \rho V_1;$$

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\rho V}{\rho V_1} = \frac{V}{V_1};$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 \cdot H = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot H,$$

$$V_1 = S_{\text{осн}_1} \cdot H = \pi R_1^2 \cdot H = \pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2 \cdot H,$$

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \cdot H}{\pi \left(\frac{D_1}{2} \right)^2 \cdot H} = \frac{\left(\frac{42}{2} \right)^2}{\left(\frac{42}{2 \cdot 3} \right)^2} = \frac{21^2}{7^2} = \left(\frac{21}{7} \right)^2 = 9.$$

Отже, перший торт у 9 разів важчий за другий.

Відповідь: у 9 разів.

Задачі для самостійної роботи

1. Обчисли об'єм термоса циліндричної форми, висота якого дорівнює 40 см, а діаметр основи становить $\frac{1}{5}$ його висоти. Скільки літрів води вмістить цей термос?
2. Цукерка має форму циліндра висота якого 4 см діаметр 1,5 см. Маса 1 см^3 становить 3 г. Визначте масу 200 таких цукерок.
3. Скільки квадратних метрів оцинкованого заліза витрачено на виготовлення баку з кришкою, який має форму циліндра висотою 2 м і діаметром 0,8 м, якщо втрати металу становлять 3 %.
4. При побудові міського водогону довжиною 8 км були використанні труби діаметром 60 см. Визначити об'єм землі, яку треба вивезти при укладанні водогону.
5. Скільки метрів води вміщує бак циліндричної форми, якщо радіус його основи дорівнює 40 см, а висота дорівнює 0,8 м?
6. Зовнішній і внутрішній діаметри кільця для колодязя відповідно 1,2 м і 1,15 м, а висота 0,8 м. Скільки кубометрів бетону потрібно для виготовлення 10 таких кілець?
7. Щоденно людина повинна вживати 3 л води. Скільки кружок води треба випити за день, якщо вона має форму циліндра висотою 15 см і діаметром 8 см?
8. Акваріум циліндричної форми заввишки 3 м з діаметром основи 4 м не заповнено водою на 10 % від його об'єму. Скільки літрів води містить такий акваріум? Скільки рибок можна запустити в цей акваріум, якщо для однієї такої рибки треба 4 л води?
9. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина – 5 м. Він наповнений водою на $\frac{4}{5}$ глибини. Обчисли з точністю до $0,1\text{ м}^3$ об'єм води у криниці.

Список використаної літератури

1. Роганіна О. М. Геометрія. 9 клас: Розробки уроків. – Харків : «Ранок» , 2009
2. Афанасьєва О.М. та інші. Дидактичний матеріал з геометрії, 10-11 кл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003
3. Бродський Я.С. Тести із стереометрії, 10-11 кл. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004
4. Мерзляк А. Г. та інші, Геометрія: проф.. рівень: підручник для 11 кл. ЗНЗ – Харків : «Гімназія» , 2019
5. Нелін Є.П., Геометрія в таблицях – Харків: «Світ дитинства», 2002