ДОВЕДЕННЯ КЛАСИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

Класичні нерівності є могутнім джерелом різноманітних нерівностей, з одного боку, а з іншого – вони часто використовуються для доведення багатьох нерівностей. У нашій роботі розглянемо такі загальновідомі нерівності як нерівність Коші-Буняковського-Шварца, нерівності між середніми величинами, які особливо багаті наслідками.

1. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца

Для довільних наборів чисел $(a_1, a_2, \dots , a_n)$ та $(b_1, b_2, \dots , b_n)$ виконується нерівність $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$, причому рівність досягається при $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Доведення. Квадратний тричлен $\mathrm{F(x)} = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geq 0$ невід'ємний, а, отже, його дискримінант D недодатний.

F(x) = $a_1^2x^2 - 2a_1b_1x + b_1^2 + \dots + a_n^2x^2 - 2a_nb_nx + b_n^2 =$

$= (a_1^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \dots + b_n^2)$.

D = $4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$.

Поділивши все на 4, отримаємо нерівність, яку треба було довести.

Зауважимо, що рівність досягається коли $\begin{cases} a_1x = b_1 \\ \dots \\ a_nx = b_n \end{cases}$; X = $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Приклад 1. Довести, що $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Розв’язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів $(\sqrt{a^2 + c^2}, b)$ та (a, $\sqrt{b^2 + c^2}$)

$(a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2})^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)$.

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Приклад 2**.** Довести, що $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.

Розв’язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів $(a_1, \dots , a_n)$ та (1 , … , 1).

$(1 * a_1 + 1 * a_2 + \dots + 1 * a_n)^2 \leq (1 + 1 + \dots + 1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$;

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

Приклад 3**.** Довести, що $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ $(a_i > 0)$.

Розв’язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів $(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ та $(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}})$.

$$(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{a_1} * \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + \sqrt{a_n} * \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)\left(\sqrt{a_1} * \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \dots + \sqrt{a_n} * \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

$$== (1 + \dots + 1)(1 + \dots + 1) = n^2.$$

Приклад 4. Довести, що якщо a+2b+3c ≥ 14 , то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$.

Розв’язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів (a, b, c) та (1,2,3):

$(a^2 + b^2 + c^2)(1 + 4 + 9) \geq (\mathrm{a} + 2\mathrm{b} + 3\mathrm{c})(\mathrm{a} + 2\mathrm{b} + 3\mathrm{c}) \geq 14 * 14;$

$(a^2 + b^2 + c^2) \geq 14 * \frac{14}{14} = 14.$

Приклад 5. Довести, що для $x_k \geq 0$ справджується нерівність $(x_1 + \dots + x_n)(x_1^7 + + \dots + x_n^7) \geq (x_1^3 + \dots + x_n^3)(x_1^5 + \dots + x_n^5)$.

Розв’язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів $(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ та $(\sqrt{x_1^5}, \dots, \sqrt{x_n^5})$. $(x_1 + \dots + x_n)(x_1^5 + \dots + x_n^5) \geq (x_1^3 + \dots + x_n^3)^2$.

Застосуємо нерівність КБШ для наборів $(\sqrt{x_1{}^3}, \dots, \sqrt{x_n{}^3})$ та $(\sqrt{x_1^7}, \dots, \sqrt{x_n^7})$.

$(x_1^7 + \dots + x_n^7)(x_1^3 + \dots + x_n^3) \geq (x_1^5 + \dots + x_n^5)^2$. Перемножимо отримані нерівності і, поділивши ліву і праву частину на $(x_1^5 + \dots + x_n^5)(x_1^3 + \dots + x_n^3)$, отримаємо нерівність $(x_1 + \dots + x_n)(x_1^7 + \dots + x_n^7) \geq (x_1^3 + \dots + x_n^3)(x_1^5 + \dots + x_n^5)$.

Приклад 6. Для a,b,c,d > 0 довести нерівність $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$.

Застосуємо нерівність КБШ для наборів $\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}, \sqrt{\frac{b}{c+d}}, \sqrt{\frac{c}{d+a}}, \sqrt{\frac{d}{a+b}}\right)$ та $(\sqrt{a(b+c)}, \sqrt{b(c+d)}, \sqrt{c(d+a)}, \sqrt{d(a+b)})$.

$(a + b + c + d)^2 \leq$ S(ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd) = S(ab+2ac+ad+bc+2bd+cd);

$\mathrm{S} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}$. Доведемо , що $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd} \geq 1$.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab - ab + ad - ad + bc - bc + cd - cd - 2ac - 2bd =$
$= \ (a-c)^2 + (b-d)^2 \ \geq 0$. Отже , $S \geq 1 + 1 = 2$.

2. Метод математичної індукції при доведенні нерівностей

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, що формулюється так: деяке твердження істинне для будь-якого натурального n, якщо:

1) воно істинне для n = 1;

2) з того, що воно істинне для n = k випливає, що воно істинне для $n = k$ +1.

Цей метод широко використовується при обґрунтуванні різних математичних тверджень, зокрема при доведенні нерівностей. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 1. Довести нерівність $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq \ |a_1| + |a_2| + \cdots + \ |a_n|$.

Проведемо доведення методом математичної індукції.

Для n=1 нерівність очевидна.

Нехай n = 2. Тоді, $|a_1 + a_2| \leq \ |a_1| + |a_2|$. Піднесемо обидві частини до квадрата $a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \leq \ a_1^2 + a_2^2 + |2a_1a_2| \quad <=> \ \ a_1a_2 \leq \ |a_1a_2|$, що очевидно.

Нехай n = k. Тоді , $|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq \ |a_1| + |a_2| + \cdots + \ |a_k|$;
$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| \leq \ |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + \ |a_{k+1}| \leq \ |a_1| + |a_2| + \cdots + \ + |a_k| + \ |a_{k+1}|$, згідно з твердженням для n = 2 і припущенням індукції.

Приклад 2. (Нерівність Бернуллі). Для x ≥ -1 та натурального n довести нерівність $(x+1)^n \geq 1 + nx$.

Розв'язання. При n = 1 нерівність набуває вигляду x+1 $\geq x + 1$.

Припустимо, що нерівність виконується для n = k: $(x+1)^k \geq 1 + kx$.

Тоді $(x+1)^{k+1} \geq (1+kx)(x+1) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$.

Приклад 3. Для натурального n довести нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \ \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Розв’язання. Для n = 1 нерівність виконується.

Нехай нерівність виконується для n = k. Тоді $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \ \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \ \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Доведемо, що права частина менша за $2\sqrt{k+1}$.

$2\sqrt{k} <$ $2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ $<=> 4k < 4k + 4 - 4 + \frac{1}{k+1}$ $<=> \frac{1}{k+1} > 0.$

Доведення завершено.

Приклад 4. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца.

Проведемо доведення методом математичної індукції. Для довільних наборів чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ виконується нерівність $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$. Для n = 1 нерівність набуває вигляду $a_1^2b_1^2 \leq a_1^2b_1^2$ і є очевидною.

Нехай нерівність виконується для n = k; Тоді $(a_1b_1 + \dots + a_kb_k)^2 \leq (a_1^2 + \dots + + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2)$.

$(a_1b_1 + \dots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1})^2 = (a_1b_1 + \dots + a_kb_k)^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}(a_1b_1 + \dots + a_kb_k) \leq (a_1^2 + \dots + + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}\sqrt{(a_1^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2)} \leq (a_1^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2) + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2(b_1^2 + \dots + b_k^2) + b_{k+1}^2(a_1^2 + \dots + a_n^2) = (a_1^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2 + b_{k+1}^2)$. Доведення завершено.

3. Нерівності між середніми величинами

Визначення:

Середнє арифметичне n чисел $a_1, \dots, a_n$ $A_n = \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}$;

Середнє геометричне n чисел $a_1, \dots, a_n$ $G_n = \sqrt[n]{a_1 * \dots * a_n}$;

Середнє квадратичне n чисел $a_1, \dots, a_n$ $S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$;

Середнє гармонічне n чисел $a_1, \dots, a_n$ $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$.

Теорема 1. $S_n \geq A_n$ для $\forall a_i$.

Доведення. З прикладу 2 випливає, що

$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.

Розділимо праву і ліву частини на n^2 і візьмемо квадратний корінь.

$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \left|\frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n}\right| \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} = A_n$, що й треба було довести.

Теорема 2. Для $a_i \geq 0$ $A_n \geq G_n$.

*Лема 1.*Якщо добуток n додатних чисел $a_1, \dots, a_n$ дорівнює 1, то їхня сума не менша від n , тобто $a_1 + \cdots + a_n \geq n$. Причому рівність має місце тільки тоді, коли $a_1 = \cdots = a_n$. Доведення виконаємо, користуючись методом математичної індукції. При n = 2 нам потрібно показати, що для двох додатних чисел a_1, a_2 таких, що $a_1 a_2 = 1$, виконується нерівність $a_1 + a_2 \geq 2$. Справді, $a_1 + \frac{1}{a1} \geq 2$.Очевидно, що знак рівності виконується при $a_1 = a_2 = 1$.

Нехай для k додатних чисел таких, що, $a_1 * \dots * a_k = 1$ виконується нерівність $a_1 + \cdots + a_k \geq k$, причому рівність має місце лише тоді, коли $a_1 = \dots = a_k$. Покажемо, що $a_1 + \cdots + a_{k+1} \geq k + 1$, якщо тільки $a_i > 0$ і $a_1 \dots a_{k+1} = 1$.Можливі два випадки:

1) всі числа рівні між собою, тобто $a_1 = \dots = a_k = 1$. Тоді $a_1 + \cdots + a_{k+1} = k + 1$;

2) не всі числа рівні. У цьому випадку серед них знайдуться числа як більші, так і менші 1. Без обмеження загальності вважатимемо $a_1 > 1$ $a_{k+1} < 1$. Поклавши $b = a_1 a_{k+1}$, отримуємо, що $a_2 * \dots * a_k * b = 1$. Тому, згідно з припущенням, для k чисел $a_2, \dots, a_k, b$ виконується нерівність $a_2 + \cdots + a_k + b \geq k$.

$a_1 + \cdots + a_{k+1} = a_2 + \cdots + a_k + b - b + a_1 + a_{k+1} \geq k + 1 - a_1 a_{k+1} + a_1 + + a_{k+1} - 1 = k + 1 + (a_1 - 1)(1 - a_{k+1}) \geq k + 1$. Доведення завершено.

Теорема 2. (Нерівність Коші). При а >= 0 $A_n \geq G_n$.

Застосуємо лему 1 для чисел $\frac{a_1}{G_n}, \dots, \frac{a_n}{G_n}$. $\frac{a_1}{G_n} * \dots * \frac{a_n}{G_n} = \frac{a_1 * \dots * a_n}{a_1 * \dots * a_n} = 1$

$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{G} \geq n$; $A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq G$, що й треба було довести.

Теорема 3. При а $\geq$ 0 $H_n \leq G_n$. Використаємо нерівність Коші для чисел $(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_{n1}})$.

$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 * \dots * a_n}}$. Перевернувши ліву і праву частини дробів, необхідно змінити знак нерівності: $\sqrt[n]{a_1 * \dots * a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.

Для додатних чисел a_i маємо ланцюжок нерівностей $S_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$.

Приклад 1. Довести , що (a+b)(a+c)(b+c) $\geq 8abc$ (a,b,c > 0).

Розв'язання. За нерівністю Коші для чисел (a,b) , (a,c) , (b,c) маємо:

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a + c \geq 2\sqrt{ac}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$.

Перемноживши ці нерівності, маємо (a + b)(a + c)(b + c) $\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$

Приклад 2. (Нерівність Бернуллі).

Для x ≥ -1 та натурального n довести нерівність $(x+1)^n \geq 1 + nx$

Розв'язання. Для x < 0 ліва частина не менша нуля, а права не більша. Отже, нерівність виконується.

Нехай x ≥ 0, тоді використаємо нерівність Коші для n чисел (1,…,1,1 + nx).

$$\frac{n-1+1+nx}{n} = x + 1 \geq \sqrt[n]{1 * \ldots * 1 * (1+nx)} = \sqrt[n]{1+nx};$$

$(x+1)^n \geq 1 + nx.$

Приклад 3. Довести , що якщо xy = 1, то $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{2}(x - y)$.

Розв'язання. Перетворимо вираз і використаємо нерівність Коші для чисел

$$((x-y)^2, 2).$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = (x-y)^2 + 2 \geq 2\sqrt{2(x-y)(x-y)} = 2\sqrt{2}|x-y| \geq 2\sqrt{2}(x-y).$$

Приклад 4. Для додатних чисел a+b+c+d = 1 довести нерівність $\sqrt{4a+1} + +\sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leq 4\sqrt{2}.$

Розв'язання. Використаємо нерівність між середнім арифметичним та середнім квадратичним чисел $\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1}, \sqrt{4d+1}$.

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} \leq 4\sqrt{\frac{4a+1+4b+1+4c+1+4d+1}{4}} == 4\sqrt{\frac{8}{4}} = 4\sqrt{2}$$

Приклад 5. Довести $cos^3x * sinx \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Розв'язання. Застосуємо нерівність між середнім геометричним і середнім квадратичним для чисел $\frac{\cos x}{\sqrt{3}}, \frac{\cos x}{\sqrt{3}}, \frac{\cos x}{\sqrt{3}}, \sqrt{1 - cos^2x}.$

$$\sqrt[2]{\left(\frac{\frac{cos^2x}{3}+\frac{cos^2x}{3}+\frac{cos^2x}{3}+1-cos^2x}{4}\right)^1} = \frac{1}{2} \geq \sqrt[4]{\frac{cos^3x * sinx}{3\sqrt{3}}};$$

$$cos^3x\, sinx \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Приклад 6. Для додатних чисел a,b,c довести нерівність $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Доведення. Застосуємо нерівність між середнім арифметичним і середнім гармонічним для чисел $\frac{a+b+c}{b+c}$,$\frac{a+b+c}{c+a}$,$\frac{a+b+c}{a+b}$.

$$\frac{\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}}{3} \geq \frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \geq 3+\frac{3}{2};$$

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Приклад 7. Для a > 0 та натуральних n > k довести $na^k - ka^n \leq n-k$.

Розв'язання. Використаємо нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним n чисел: n-k одиниць та k чисел a^n.

$1+\cdots+1+a^n+\cdots+a^n = n-k+ka^n \geq n\sqrt[n]{a^{nk}} = na^k$.Отже, $na^k - ka^n \leq n--k$, що й треба було довести.

Приклад 8. Для додатних x,y,z довести

$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)(x^2+y^2+1)(x^2+z^2++1)(y^2+z^2+1) \geq 729x^2y^2z^2$.

Розв'язання. Застосуємо нерівність КБШ для наборів (x;1;z) та (1;y;1).

$(y^2+2)(x^2+z^2+1) \geq (x+y+z)^2$.

Далі для наборів (x;y;1) та (1;1;z):

$(z^2+2)(x^2+y^2+1) \geq (x+y+z)^2$.

Для наборів (1;y;z) та (x;1;1):

$(x^2+2)(y^2+z^2+1) \geq (x+y+z)^2$.

Перемноживши ці три нерівності, отримуємо:

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)(x^2+y^2+1)(x^2+z^2+1)(y^2+z^2+1) \geq (x+y+z)^6.$$

З нерівності Коші для чисел x, y, z маємо: $(x+y+z)^6 \geq \left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^6 = 729x^2y^2z^2$.

Доведення завершено.

Отже ми розглянули класичні нерівності, що є фундаментом для доведення багатьох інших нерівностей, розв'язання та створення різноманітних задач.