МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ
«ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

на тему:

«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Розробник: Марина Стулєнкова

Київ - 2023

ЗМІСТ

Вступ

Сучасне заняття необхідно розглядати у вигляді потоків інформації: від викладача до студента, від студента до викладача і від студента до студента. Спонукований спрагою одержання нових знань і бажанням освоїти улюблену спеціальність, студент приходить до викладача на заняття. Уважно вслуховуючись у кожне його слово, він одержує так необхідну для нього інформацію. Досвідчений педагог обов'язково постарається підсилити інтерес студента до дисципліни вміло, керуючи потоком інформації. З цією ж метою необхідні мотивація й актуалізація досліджуваного на занятті матеріалу. Розглянутій інформації при цьому важливо присвоїти статус життєво важливої і вкрай необхідної для студента. Тоді її вивчення відбувається легко й природно. Нова, конкретна, а не абстрактна інформація, підтвердження теорії практикою, приклади з реального життя – усе це в комплексі значно підвищує інформованість студентів. Залучення студента до активної роботи на занятті також сприяє підвищенню ефективності процесів обробки інформації.

Запропонована методична розробка заняття представлена за такою схемою: визначена мета заняття, розкрито зміст вивчення матеріалу, вказано форми перевірки засвоєння матеріалу.

Тема:

“Інтегральне числення”

Мета:

Навчальна:

- узагальнити знання з теми;
- засвоїти методи інтегрування;
- удосконалити вміння знаходити невизначені та визначені інтеграли;
- навчитись застосовувати інтеграл для обчислення площ криволінійних фігур;
- навчитись застосовувати інтеграл для обчислення об’ємів та площ поверхонь тіл обертання;
- навчитись застосовувати інтеграл до розв’язку фізичних задач.

Розвиваюча:

- розвивати увагу;
- розвивати логічне мислення;
- розвивати математичне мовлення.

Виховна:

- виховувати почуття відповідальності;
- виховувати вміння слухати, висловлювати свою точку зору;
- виховувати пізнавальний інтерес до предмету, самостійність у прийнятті рішення;
- виховувати охайність і точність при обчисленні визначених інтегралів, площ та об’ємів фігур.

Епіграф:

Математика — це велична споруда, створена уявленнями людини, для пізнання Всесвіту.

Ле Корбюз’є

Міжпредметні зв’язки: геометрія, фізика.

Історичний екскурс

Евдокс Кнідський (бл. 408-355 рр. до н. е.) - старогрецький вчений. Дав повний доказ теореми про обсяг піраміди; теореми про те, що площі двох кіл відносяться як квадрати їх радіусів. При доведенні він застосував так званий метод «вичерпання», який знайшов своє використання (з деякими змінами) у працях його послідовників. Через дві тисячі років метод «вичерпання» був перетворений у метод інтегрування, за допомогою якого вдалося об'єднати різні завдання - обчислення площі, об'єму, маси, роботи, тиску, електричного заряду, світлового потоку і багато, багато інших.

Проілюструємо «метод вичерпання» на простому прикладі. Припустимо, що нам треба знайти об'єм лимона. Він має неправильну форму і тому застосувати будь-яку відому формулу об'єму не можна. За допомогою зважування знайти об'єм також важко, оскільки щільність лимона в різних частинах його різна. Поступимо таким чином. Розріжемо лимон на тонкі часточки. Кожну часточку приблизно можна вважати циліндриком, радіус основи, якого можна виміряти. Обсяг такого циліндра вирахувати легко за готовою формулою. Склавши об'єми маленьких циліндрів, ми отримаємо наближене значення об'єму всього лимона. Наближення буде тим точніше, ніж на більш тонкі частини ми зможемо розрізати лимон.

Слідом за Евдоксом метод «вичерпання» і його варіанти для обчислення об'ємів і площ застосовував стародавній вчений Архімед. Успішно розвиваючи ідеї своїх попередників, він визначив довжину кола, площу круга, об'єм і площу поверхні кулі. Висловлюючись сучасною мовою, Архімед визначив інтеграли.

Термін «інтеграл» (від лат. integer - цілий, тобто ціла, вся - площа) був запропонований у 1696 р. Іоганном Бернуллі.

Знак $\int$ - стилізована літера S від латинського слова summa – “сумма”. Вперше з’явився у Готфріда В. Лейбница в 1686 р.

Розділ 1. Невизначений інтеграл

1.1 Первісна функція. Таблиця інтегралів

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення та ділення, піднесення до степеня та добування кореня, логарифмування та потенціювання, диференціювання та інтегрування.

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної або диференціала заданої функції. Часто виникає потреба знайти обернену задачу – визначити функцію за її похідною або диференціалом. Це і є одна з основних задач інтегрального числення.

*Диференційована функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $y = f(x)$ на проміжку X, якщо $F'(x) = f(x)$.*

Приклад:

1) Функція $f(x) = 3x^2$, має первісні $F(x) = x^3;\ x^3 + 1;\ \ x^3 - 7,\ \dots, x^3 + C$.
2) Функція $f(x) = cosx$, має первісні $F(x) = sinx;\ sinx + 1;$
$sinx - 7,\ \dots, sinx + C$.
3) Функція $f(x) = \frac{1}{cos^2x}$, має первісні $F(x) = tgx;\ tgx + 1;$
$tgx - 7,\ \dots, tgx + C$.

Невизначений інтеграл та його основні властивості.

*Сукупність усіх первісних $F(x) + C$ для заданої функції $f(x)$ називають **невизначеним інтегралом** і позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$, де*

$\int$ - знак інтеграла,

$f(x)dx$ - підінтегральний вираз,

$f(x)$ - підінтегральна функція,

x - змінна інтегрування,

$F(x)$ - деяка первісна для $f(x)$,

С – довільна стала інтегрування.

*Операція знаходження невизначеного інтеграла називається **інтегруванням**.*

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює підінтегральній функції $\int df(x) = f(x) + C$ (комбінація символів $<< d\int >>$ взаємно знищується).
3. Сталий множник A можна виносити за знак інтеграла $\int A\ f(x)dx = A\int f(x)dx$.
4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює тій самій алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної із функцій – доданків, тобто $\int[f(x) \pm g(x) \pm k(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \int k(x)dx$.

Таблиця інтегралів

$$\int \mathbf{0}\, dx = c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{matrix} arcsin(x) \\ -arccos(x) \end{matrix}\right. + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\begin{matrix} arctg(x) \\ -arcctg(x) \end{matrix}\right. + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Методи інтегрування

- Безпосереднє інтегрування
- Інтегрування методом заміни змінної (підстановки)
- Інтегрування частинами

1.2 Безпосереднє інтегрування

Цей метод базується на використанні таблиці основних інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла. Але в деяких випадках спочатку потрібно зробити алгебраїчні перетворення підінтегральної функції.

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int\left(5\,sin\,x+\frac{2}{x}-4x^3+5^x\right)dx=-5\,cos\,x+2\,ln|x|-4\frac{x^4}{4}+\frac{5^x}{ln\,5}+C;$

2) $\int\frac{4-3x+2x^2+x^3}{x^2}dx=\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x^3}{x^2}\right)dx=\int\left(4x^{-2}-\frac{3}{x}+2+x\right)dx=$

$4\frac{x^{-1}}{-1}-ln|x|+2+\frac{x^2}{2}+C.$

3) $\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x})\,dx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}+1)\,dx=tgx+x+c$

4) $\int(3\cos x-4\cdot 2^x)dx=\int 3\cos x dx-\int 4\cdot 2^x dx=3\int\cos x dx-4\int 2^x dx=3\cdot\sin x-4\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$;

5) $\int(4x-3)^2\cdot x\cdot dx=\int(16x^2-24x+9)\cdot x\cdot dx=\int(16x^3-24x^2+9x)dx=\int 16x^3dx-\int 24x^2dx+$

$+\int 9xdx=16\int x^3dx-24\int x^2dx+9\int xdx=16\cdot\frac{x^4}{4}-24\cdot\frac{x^3}{3}+9\cdot\frac{x^2}{2}=4x^2-8x^3+\frac{9}{2}x^2+C.$

6) $\int\frac{6x^2-5+3x}{x}\cdot dx=\int(\frac{6x^2}{x}-\frac{5}{x}+\frac{3x}{x})dx=\int(6x-\frac{5}{x}+3)dx=\int 6xdx-\int\frac{5}{x}dx+\int 3dx=6\int xdx-$

$-5\int\frac{1}{x}dx+3\int dx=6\cdot\frac{x^2}{2}-5\ln|x|+3x+C.$

1.3 Заміна змінної

Для знаходження заданого інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку $x = \phi(t)$, $dx = \phi^{/}(t)dt$, тоді $\int f(x)dx = \int f\big(\phi(t)\big)\cdot\phi'(t)dt$

Алгоритм методу заміни змінної.

1. Частину підінтегральної функції замінити на нову змінну.
2. Знайти диференціал від обох частин заміни.
3. Весь підінтегральний вираз виразити через нову змінну, щоб одержати табличний інтеграл.
4. Знайти одержаний інтеграл.
5. Виконати обернену заміну.

Приклад. За допомогою підстановки знайти інтеграли :

а) $\int(5x-2)^6dx = \left|\begin{array}{c} 5x-2=t \\ (5x-2)'dx = dt \\ 5dx = dt \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{array}\right| = \int\frac{1}{5}t^6dt = \frac{1}{5}\int t^6dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^7}{7} = \frac{(5x-2)^7}{35} +$

$+C.$

б) $\int 3\cos 3\,xdx = 3\int\cos 3\,xdx = \left|\begin{array}{c} 3x=t \\ (3x)'dx = dt \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = 3\int\cos t\cdot\frac{1}{3}dt =$

$\int\cos t\,dt = \sin t + C = \sin 3\,x + C.$

в)$\int\frac{5x^2dx}{2-3x^3} = 5\int\frac{x^2dx}{2-3x^3} = \left|\begin{array}{c} 2-3x^3=t \\ (2-3x^3)'\cdot dx = dt \\ -9x^2dx = dt \\ x^2dx = -\frac{1}{9}dt \end{array}\right| = 5\int\frac{-\frac{1}{9}dt}{t} = -\frac{5}{9}\int\frac{dt}{t} = -\frac{5}{9}ln|t| +$

$+C = -\frac{5}{9}ln|2-3x^3| + C$

г) $\int\frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx = \left|\begin{array}{c} \mathrm{tg}\,x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \\ dx = \cos^2(x)\,dt \end{array}\right| = \int\frac{t}{\cos^2 x}\cos^2(x)\,dt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + c =$

$\frac{\mathrm{tg}^2\,x}{2} + +c$

д) $\int \cos x \sin x \; dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{matrix} \right| = \int \cos x \, t \, \frac{dt}{\cos x} = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

є) $\int \frac{2xdx}{\cos^2(1-3x^2)} = \left| \begin{matrix} 1-3x^2 = t \\ (1-3x^2)^{/} dx = dt \\ -6xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{6} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2 \cdot (-\frac{1}{6})dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3} tgt = -\frac{1}{3} tg(1-3x^2) + C.$

ж) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ (\cos x)^{/} dx = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = \int t^3 \cdot (-dt) = -\frac{t^4}{4} = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$

з) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ (\ln x)^{/} dx = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x} + C.$

Доцільно запам’ятати формули, які легко виводяться методом заміни змінної:

1. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C,$

2. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{ln\, a} + C,$

3. $\int sin\, k\, x dx = -\frac{1}{k} cos\, k\, x + C,$

4. $\int cos\, k\, x dx = \frac{1}{k} sin\, k\, x + C.$

5. $\int f(kx+b)\, dx = \frac{1}{k} F(x) + c$ – формула лінійної залежності

1.4 Інтегрування частинами

Цей метод застосовується якщо під знаком інтеграла є добуток функцій, причому хоча б одна з них не є степеневою.

I. $\int P_n(x)\,\langle e^x, a^x, \cos x, \sin x, \frac{1}{cos^2 x}, \frac{1}{sin^2 x}\rangle\, dx =$

$$\left| \begin{matrix} u = P_n(x) & du = \left(P_n(x)\right)' dx \\ dv = \langle\ \rangle dx & v = \int\langle\ \rangle\, dx \end{matrix} \right| = uv - \int vdu;$$

II. $\int P_n(x)\langle \ln x, \log_a x\,, a^x, \operatorname{arccos} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x\rangle\, dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \langle\ \rangle & du = (\langle\ \rangle)'\, dx \\ dv = P_n(x)dx & v = \int P_n(x)\, dx \end{matrix} \right| = uv - \int vdu;$$

III. $\int e^{\alpha x}\,\langle \sin\beta x\,, \cos\beta x\rangle\, dx = \left| \begin{matrix} u = e^{\alpha x} & du = \alpha e^{\alpha x}\, dx \\ dv = \langle\ \rangle dx & v = \int\langle\ \rangle\, dx \end{matrix} \right| = \cdots$ двічі –

рекурентна формула.

В інтегралах виду $\int \sin(kx+b)\cdot e^{px+l}dx,\ \int \cos(kx+b)\cdot a^{px+l}dx$ немає значення, що позначати u, а що позначати dv, але такі позначення треба робити двічі, тому що двічі відбувається інтегрування частинами. В результаті одержимо рівняння відносно шуканого інтеграла, розв’язавше яке, знайдемо інтеграл.

Приклад. З найти інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами :

а) $\int x\cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ \ du = (x)' dx = dx \\ dv = e^x dx,\ \ v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right| = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$.

б) $\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x,\ \ du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx,\ \ v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

в) $\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \begin{vmatrix} u = \sin x, & du = (\sin x)'dx = \cos x dx \\ dv = e^{2x+3}dx, & v = \int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \int \frac{1}{2}e^{2x+3} \cdot$

$\cdot \cos x dx = \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2}\int \cos x \cdot e^{2x+3}dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, & du = (\cos x)'dx = -\sin x dx \\ dv = e^{2x+3} \cdot dx, & v = \int e^{2x+3}dx = \frac{1}{2}e^{2x+3} \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos x \cdot e^{2x+3} - \int \frac{1}{2}e^{2x+3} \cdot (-\sin x dx)\right) = \frac{1}{2}\sin x \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{4}\cos x \cdot e^{2x+3} -$

$-\frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx.$

Маємо рівняння відносно шуканого інтеграла $\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx$:

$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4}e^{2x+3}(2\sin x - \cos x) - \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx.$

Перенесемо невідомий інтеграл в ліву сторону рівняння, приведемо подібні і знайдемо шуканий інтеграл:

$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx + \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4}e^{2x+3} \cdot (2\sin x - \cos x),$

$\frac{5}{4}\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{1}{4} \cdot e^{2x+3} \cdot (2\sin x - \cos x),$ звідки

$\int \sin x \cdot e^{2x+3}dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{2x+3}(2\sin x - \cos x) + C = \frac{1}{5}e^{2x+3} \cdot (2\sin x - \cos x) + C =$

$= \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) \cdot e^{2x+3} + C.$

г) $\int (x-1)e^{2x}\,dx = \begin{vmatrix} u = (x-1) & du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} = uv - \int v du = (x -$

$-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = (x-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$

д) $\int x \cdot 3^x dx = \begin{vmatrix} u = x; du = (x)^/ dx = dx \\ dv = 3^x dx; v = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{vmatrix} = x \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3} \cdot dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x dx =$

$= \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} = \frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C.$

е) $\int 10x \cdot \ln x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = \ln x; du = (\ln x)^/ dx = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = 10x dx; v = \int 10x dx = 5x^2 \end{vmatrix} = 5x^2 \cdot \ln x - \int 5x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = 5x^2 \ln x -$

$$-5\int x dx = 5x^2 \cdot \ln x - 5\frac{x^2}{2} = 5x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C.$$

є) $\int x^2 \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = \begin{vmatrix} u = 2x; du = 2dx \\ dv = e^x dx; v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \cdot e^x -$

$$-(2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2dx) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

1.5Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ зводиться до виділення повного квадрату із квадратного тричлена і використання формул:

1. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$
3. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Розглянемо наступні види виразів, що містять квадратний тричлен в знаменнику:

(I) $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$

(II) $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

(III) $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$

(IV) $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

- Для (I) і (II):

  Виділяємо повний квадрат і використовуємо табличну формулу.

- Для (III) та (IV):

  1) Знаходимо похідну від знаменника: $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

2) Виділяємо в чисельнику заданий вираз: $\int \frac{(2ax+b)+f(x)}{ax^2+bx+c}dx.$

3) Почленно ділимо дріб : $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$(лін. залежність) $+$

$\int \frac{f(x)}{ax^2+bx+c}dx$ (діємо, як для (I) і (II)).

Приклад.

1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x+10}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат в знаменнику, одержимо

$x^2-2\cdot 1x+1-1+10=(x-1)^2+9$

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+10}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+9}=\left|\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array}\right|=\int \frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}=\frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C.$$

2. Знайти інтеграл $\int \frac{(x-2)dx}{x^2+4x+5}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{(x-2)dx}{x^2+4x+5}=\left|\begin{array}{l} x^2+4x+5=x^2+2\cdot 2x+4-4+5= \\ \qquad =(x+2)^2+1 \end{array}\right|=\int \frac{(x-2)dx}{(x+2)^2+1}=\left|\begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array}\right|=\int \frac{(t-2-2)dt}{t^2+1}=$$

$$\int \frac{(t-4)dt}{t^2+1}=\int \frac{tdt}{t^2+1}-4\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|-4arctgt=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right|-4arctg(x+2)+C.$$

3. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+17}}=\left|x^2-8x+25=x^2-2\cdot 4x+4^2-4^2+25=(x-4)^2-16+25=(x-4)^2+9\right|=$$

$$=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=\left|\begin{array}{l} x-4=t \\ dx=dt \end{array}\right|=\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right|+C=\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+17}\right|+C.$$

1.6 Інтегрування дробово-раціональних виразів

Дріб називається раціональним, якщо його чисельник та знаменник є многочленами.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)};\ n, m - \text{найвищі степені многочленів.}$$

Раціональний дріб називається правильним, якщо найвищий показник степеня чисельника менший за найвищий показник степеня знаменника ($n < m$).

Якщо $n \geq m$, тобто дріб неправильний, то потрібно поділити чисельник на знаменник за правилом ділення багаточленів, тоді отримаємо заданий дріб у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_n(x) + \frac{R}{Q_m(x)}.$$

Приклад. Раціональний дріб розкласти на суму многочлена та правильного дробу.

а) $\frac{x^2+3x+1}{2x^3+4x+8}$, оскільки *n=2, m=3 і 2<3*, то даний дріб правильний і його не можна розкласти на суму многочлена та правильного дробу.

б) $\frac{x^4+2x^3-3x+8}{x^2-4x+1}$, оскільки *n=4, m=2 і 4>2,* то даний дріб неправильний і його можна розкласти на суму многочлена і правильного дробу.

Результат отримаємо за допомогою ділення чисельника на знаменник:

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-3x+8 & x^2-4x+1 \\ \cline{2-2}
- & x^2+6x+23 \\
x^4-4x^3+x^2 & \\ \hline
6x^3-x^2-3x & \\
- & \\
6x^3-24x^2+6x & \\ \hline
23x^2-9x & \\
- & \\
23x^2-92x+23 & \\ \hline
83x-23 &
\end{array}$$

Остаточно маємо:

$$\frac{x^4+2x^3-3x+8}{x^2-4x+1}=x^2+6x+23+\frac{83x-23}{x^2-4x+1}.$$

$$\int\frac{x^4+2x^3-3x+8}{x^2-4x+1}dx=\int\left(x^2+6x+23+\frac{83x-23}{x^2-4x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+23x+\int\frac{41{,}5(2x-4)+166-23}{x^2-4x+1}dx$$

Найпростіші раціональні дроби:

I. $\frac{A}{x-a}$

II. $\frac{B}{(x-b)^k}$

III. $\frac{Dx+C}{x^2+px+q}$, знаменник не розкладається на множники ($D<0$);

IV. $\frac{Dx+C}{(x^2+px+q)^k}$, знаменник не розкладається на множники ($D<0$).

Розглянемо інтегрування найпростіших дробів:

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c$

II. $\int\frac{B}{(x-b)^k}dx=B\int(x-b)^{-k}\,dx=B\,\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1}+c$

III. та IV. Виділити повний квадрат.

Теорема: будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнт яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

1) Якщо корені знаменника $Q_m(x)$ дійсні та різні

$Q_m(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots$, то $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{A_3}{x-a_3}+\cdots$.

2) Якщо корені знаменника дійсні, при чому деякі з них кратні k

$Q_m(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-b)^k\dots$, то

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_k}{(x-b)^k}$.

3) Корені знаменника дійсні, деякі з них кратні k, знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники ($D < 0$)

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)(x-b)^k(ax^2+bx+c)}$, тоді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}.$$

Числа $A, B, B_1, \ldots, C, D$ – невідомі коефіцієнти. Їх обчислють за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Алгоритм методу невизначених коефіцієнтів.

1. Перетворити даний дріб в правильний.
2. Перетворити знаменник в добуток найпростіших многочленів.
3. Записати правильний дріб в вигляді суми найпростіших дробів I-IV типів, де в чисельнику стоять невизначені коефіцієнти.
4. Звести суму найпростіших дробів до спільного знаменника і отримати СЛАР, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної.
5. Розв'язок СЛАР дає невизначені коефіцієнти.
6. Кінцевий результат отримуємо після обчислення інтегралів від многочлена і найпростіших дробів.

Приклад . Знайти інтеграл $\int \frac{3x-2}{x^2-5x+6}dx$.

Розв'язання: підінтегральний дріб правильний, розкладаємо знаменник на множники $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, одержимо

$$\frac{3x-2}{x^2-5x+6} = \frac{3x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)} = \frac{x(A+B)+(-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники першого і останнього дробу рівні, тому прирівняємо їх чисельники:

$3x-2 = x(A+B)+(-3A-2B)$ – ця рівність можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні, тобто складаємо СЛАР:

$\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4 \\ B=7 \end{cases}$. Розклад підінтегральної функції тепер має вигляд:

$\frac{3x-2}{x^2-5x+6}=-\frac{4}{x-2}+\frac{7}{x-3}$. Інтегруючи цю рівність, маємо:

$$\int\frac{3x-2}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{-4}{x-2}dx+\int\frac{7}{x-3}dx=-4\ln|x-2|+7\ln|x-3|=\ln|x-3|^7-\ln|x-2|^4=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^7}{(x-2)^4}\right|+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\frac{x-2}{(x-4)^2(x+1)}dx$.

Розв’язання: підінтегральний дріб правильний, тому маємо $\frac{x-2}{(x-4)^2(x+1)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{x+1}$. Зведемо праву частину до спільного знаменника, одержимо

$$\frac{x-2}{(x-4)^2(x+1)}=\frac{A(x-4)(x+1)+B(x+1)+C(x-4)^2}{(x-4)^2(x+1)}=\frac{A(x^2+x-4x-4)+B(x+1)+C(x^2-8x+16)}{(x-4)^2(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(-3A+B-8C)+(-4A+B+16C)}{(x-4)^2(x+1)}.$$

Маємо, що $0x^2+x-2=x^2(A+C)+x(-3A+B-8C)+(-4A+1B+16C)$

тому $\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B-8C=1 \\ -4A+B+16C=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} A=-\frac{3}{25} \\ B=-\frac{22}{5} \\ C=\frac{3}{25} \end{cases}$.

Остаточно отримаємо $\frac{x-2}{(x-4)^2(x+1)}=\frac{-\frac{3}{25}}{x-4}+\frac{-\frac{22}{5}}{(x-4)^2}+\frac{\frac{3}{25}}{x+1}$

Знайдемо інтеграл $\int\frac{(x-2)dx}{(x-4)^2(x+1)}=-\frac{3}{25}\int\frac{dx}{x-4}-\frac{22}{5}\int\frac{dx}{(x-4)^2}+\frac{3}{25}\int\frac{dx}{x+1}=$

$$=-\frac{3}{25}\ln|x-4|+\frac{22}{5}\left(\frac{1}{x-4}\right)+\frac{3}{25}\ln|x+1|+C.$$

1.7 Інтегрування ірраціональних виразів

При інтегруванні виразів, що містять дробові степені змінної (тобто ірраціональності) методом підстановки, зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу (раціоналізують інтеграл). Якщо підінтегральна функція є раціональним дробом відносно x^{α}, де α - дробове число, то в цьому випадку вводять нову змінну $t = x^{1/q}$, де q - спільний знаменник дробових показників степеня змінної x.

1) $\int R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}},\ \dots,\ x^{\frac{r}{s}}\right)dx$; R – раціональна функція своїх аргументів.

$\left|\begin{matrix} x = t^k \\ dx = kt^{k-1}dt \end{matrix}\right|$, k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^5}} = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{4/3} - x^{5/4}}$, спільний знаменник степенів $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$

змінної x дорівнює 12; зробимо підстановку $x^{\frac{1}{12}} = t$, тоді

$x = t^{12},\ dx = 12t^{11}dt,\ x^{\frac{1}{2}} = t^6, x^{\frac{4}{3}} = t^{16}, x^{\frac{5}{4}} = t^{15},$ маємо $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{4}}} = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^{16} - t^{15}} =$

$$= 12\int \frac{t^{17}}{t^{15}(t-1)}dt = 12\int \frac{t^2dt}{t-1} = 12\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1}dt = 12\int \frac{t^2-1}{t-1}dt + 12\int \frac{dt}{t-1} = 12\int (t+1)dt + 12\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 12 \cdot \frac{t^2}{2} + 12t + 12\ln|t-1| = 6t^2 + 12t + 12\ln|t-1| = 6 \cdot \left(x^{\frac{1}{12}}\right)^2 + 12x^{\frac{1}{12}} + 12\ln\left|x^{\frac{1}{12}} - 1\right| =$$

$$= 6x^{\frac{1}{6}} + 12x^{\frac{1}{12}} + 12\ln\left|x^{\frac{1}{12}} - 1\right| + C.$$

2) $\int R\left(x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \dots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$;

$\left|\frac{ax+b}{cx+d} = t^k\right|$, k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$; $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$.

Приклад. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}} = \left| \begin{matrix} (2x-1)^{\frac{1}{4}} = t \\ 2x-1 = t^4 \\ 2dx = 4t^3dt \\ dx = 2t^3dt \\ (2x-1)^{\frac{1}{2}} = t^2 \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^3dt}{t^2-t} = \int \frac{2t^3dt}{t(t-1)} =$

$$= 2\int \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int \frac{(t^2-1+1)dt}{t-1} = 2\int\left(\frac{t^2-1}{t-1}+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = t^2+2t+2\ln|t-1|+C = \left((2x-1)^{\frac{1}{4}}\right)^2+2(2x-1)^{\frac{1}{4}}+2\ln\left|(2x-1)^{\frac{1}{4}}-1\right|+C =$$

$$= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2+C.$$

1.8 Інтегрування тригонометричних виразів

1. Для інтегрування виразів $\int \sin Ax\cdot\cos Bxdx;$ $\int \sin Ax\sin Bxdx;$ $\int \cos Ax\cos Bxdx$ *зручно користуватися наступними формулами, які перетворюють добуток функцій в суму:*

- $\sin Ax\cos Bx = \frac{1}{2}(\sin(A+B)x+\sin(A-B)x);$
- $\cos Ax\cos Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x+\cos(A+B)x);$
- $\sin Ax\sin Bx = \frac{1}{2}(\cos(A-B)x-\cos(A+B)x).$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \sin 2x\cos 7xdx$.

Розв'язання: $\int \sin 2x\cos 7xdx = \int \frac{1}{2}(\sin 9x+\sin(-5x))dx = \frac{1}{2}\int \sin 9xdx - \frac{1}{2}\int \sin 5xdx =$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\cos 9x\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) = -\frac{1}{18}\cos 9x+\frac{1}{10}\cos 5x+C.$$

2. Для інтегралів вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ *де* $R(\sin x;\cos x)$ *означає, що над функціями* $\sin x$ *та* $\cos x$ *здійснюються операції в межах чотирьох арифметичних дій застосовується універсальна тригонометрична* *підстановка* $t = tg\frac{x}{2}$, $x = 2arctgt,\ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, тоді

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання: $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2arctgt, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

Однак внаслідок універсальності ця підстановка часто приводить до складних інтегралів.

3. Для інтегрування виразів $\int \sin^P x \cos^K x dx$ *розглянемо два випадки:*

а) нехай p *і* k *-* *парні числа, тоді застосовуються формули пониження степеня:*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x); \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \left|\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right| = \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

б) $\int R(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x)\, dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = z \\ \sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+z^2} \\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right|$

в) якщо серед чисел p *і* k ***хоча б одне непарне****, то потрібно відокремити від непарного степеня один множник, застосувати формули* $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$*, і ввести нову змінну* $\cos x = t$ *або* $\sin x = t$.

Приклад.

1. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$\int (1-t^2) \cdot t^2 \cdot (-dt) = \int (-t^2 + t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^4 x \sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{(\sin^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^3 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^3 x} =$

$$= \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ (\cos x)' dx = dt \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{(1-t^2)^2(-dt)}{t^3} = -\int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^3} = -\int \left(\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right) dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + 2\ln|t| - \frac{t^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2t^2} + \ln|t|^2 - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln\left|\cos^2 x\right| - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

4. *Для інтегрування виразів* $\int R(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)\, dx$ *використовується підстановка:*

$$\int R(\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)\, dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = z \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{z} \\ dx = \frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right|$$

1.9 Інтеграли, які не виражаються через елементарні функції.

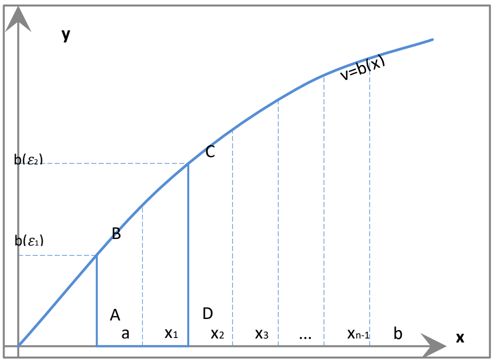
Існують функції, інтеграли від яких не виражаються через елементарні функції.

Наприклад, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ (інтегральний синус), $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (інтегральний косинус), $\int \frac{dx}{\ln x}; \int \frac{e^x}{x} dx; \int e^{-x^2} dx$ (останній часто застосовують у теорії ймовірностей).

Такі інтеграли обчислюють за допомогою рядів або нескінчених добутків елементарних функцій.

Розділ 2. Визначений інтеграл

2.1 Поняття визначеного інтегралу та його властивості



Визначеним інтегралом функції $f(x)$ в межах від a до b називають приріст будь-якої первісної функції, коли x змінюється від a до b.

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)}$ – формула Ньютона-Лейбніца.

Нехай $y = b(x)$ визначена на відрізку a, b. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Виберемо на кожному відрізку ε_i.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot \frac{AB+CD}{2} \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = \frac{1}{2}\Delta x \cdot f(\varepsilon_i).$$

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} \Delta x \cdot f(\varepsilon_i)$$

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}f(\varepsilon_i)\cdot\Delta x$$

Властивості:

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла $\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx\ \ (C=const)$.
2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі визначених інтегралів від кожного доданку $\int_a^b\left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots f_n(x)\right)dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx\pm\ldots\int_a^b f_n(x)dx$.
3. Якщо змінити межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.
4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx=0$.
5. Якщо $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $c\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.
6. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на відрізку $[a;b]$, і для будь-якого $x\in[a;b]$, $f(x)\geq\varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b \varphi(x)dx$.
7. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції на цьому відрізку, то $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$.
8. Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку існує точка C для якої $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

Приклад.

Обчислити інтеграли: а) $\int_1^3\frac{dx}{2x}$; б) $\int_{-2}^{1}2x^3dx$.

Розв’язання: а) $\int_1^3 \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$.

б) $\int_{-2}^{1} 2x^3 dx = 2\int_{-2}^{1} x^3 dx = 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{2} - \left(-\frac{2}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

2.2 Методи інтегрування.

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Заміна змінної у визначеному інтегралі здійснюється за формулою

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \\ \alpha = \varphi(a) \\ \beta = \varphi(b) \\ \alpha \le t \le \beta \end{array}\right| = \int_\alpha^\beta f(t)dt .$$

Приклад. Знайти інтеграли використовуючи формули заміни змінної

а) $\int_0^2 \frac{2xdx}{3+x^2}$; б) $\int_0^3 x\sqrt{3+x}dx$; в) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

Розв’язання: а) $\int_0^2 \frac{2xdx}{3+x^2} = \begin{bmatrix} t = 3+x^2 \\ dt = 2xdx \\ t_н = 3 \\ t_в = 7 \end{bmatrix} = \int_3^7 \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln\frac{7}{3}$.

б) $\int_0^3 x\sqrt{3+x}dx = \left|\begin{array}{ll} t = \sqrt{3+x} & dx = 2tdt \\ t^2 = 3+x & t_н = \sqrt{3+0} = \sqrt{3} \\ x = t^2 - 3 & t_в = \sqrt{3+3} = \sqrt{6} \end{array}\right| = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} (t^2-3)2t^2 dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} (t^4 - 3t^2)dt =$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5} - 3\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{6}^5}{5} - 3\cdot\frac{\sqrt{6}^3}{3}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}^5}{5} - 3\cdot\frac{\sqrt{3}^3}{3}\right) = \frac{12\sqrt{3}}{5}(\sqrt{2}+1).$$

в) $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ dx = x dt \\ t_{в} = \ln e = 1 \\ t_{н} = \ln 1 = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\cos t}{x} x\, dt = \int_0^1 \sin t = \sin 1 - \sin 0 =$

$\sin 1$;

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі здійснюється за формулою

$$\int_a^b U dV = UV \Big|_a^b - \int_a^b V dU .$$

I) $\int_a^b P_n(x) \left\langle e^x, a^x, \cos x, \sin x, \frac{1}{\cos^2 x}, \frac{1}{\sin^2 x} \right\rangle dx =$

$$\left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = \left(P_n(x)\right)' dx \\ dv = \langle\ \rangle dx & v = \int \langle\ \rangle\, dx \end{array} \right| = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

II) $\int_a^b P_n(x) \langle \ln x, \log_a x, a^x, \operatorname{arccos} x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x \rangle\, dx =$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = \langle\ \rangle & du = (\langle\ \rangle)' dx \\ dv = P_n(x) dx & v = \int P_n(x)\, dx \end{array} \right| = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклад.

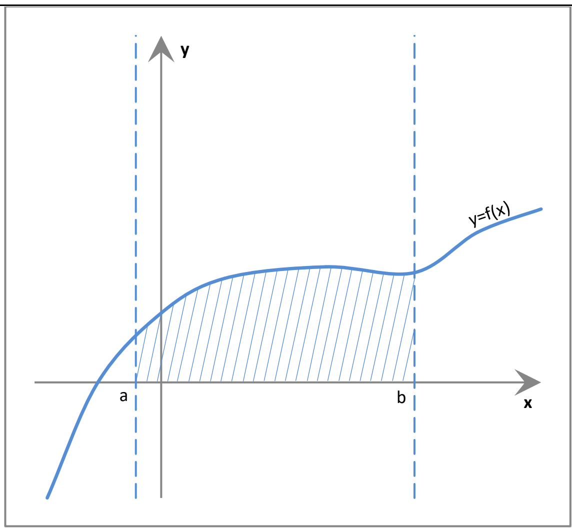
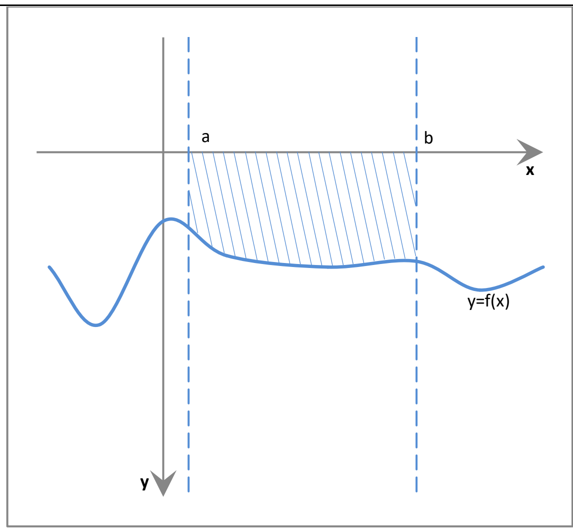
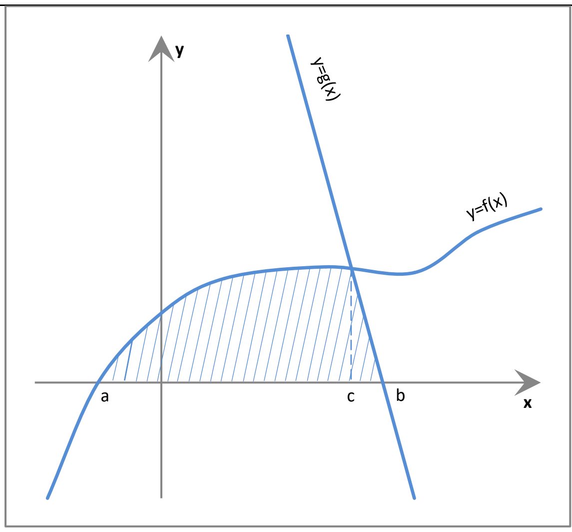
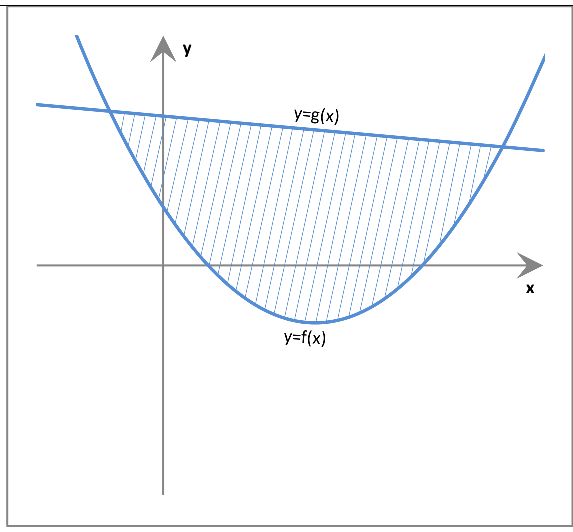
1. Знайти інтеграл: $\int_1^2 x e^x dx$.

Розв'язання:

$$\int_1^2 x e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right| = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2 .$$

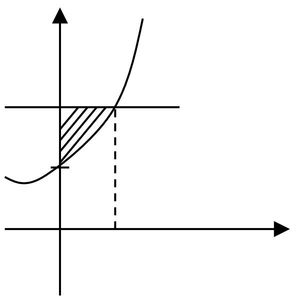
2.3 Обчислення площ плоских фігур

Геометричне застосування визначеного інтеграла – це знаходження площ фігур, обмежених лініями

	
$S=\int_a^b f(x)\,dx$	$S=\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert$
	
$a: f(x)=0;\ b: g(x)=0;\ \ c: f(x)=g(x)$ $S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b g(x)\,dx$	$a,b: f(x)=g(x)$ $S=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$

Приклад. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

$y=e^x,\ y=e,\ \ x=0$.



Розв'язання: Побудуємо фігуру обмежену лініями

За формулою площі фігури, обмеженої лініями, одержимо

$$S=\int_0^1\left(e-e^x\right)dx=\left(e\cdot x-e^x\right)\Big|_0^1=e-e-0+e^0=1 \text{ (кв. од.).}$$

2.4Застосування інтеграла для обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл обертання, знаходження довжини дуги.

Навколо осі Ox:

1) Довжина дуги кривої $y=f(x)$, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$, обчислюється за наступною формулою:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Об'єм та площа тіла обертання:

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою $y=f(x)$, відрізком AB осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$, обертається навколо осі Ox, тоді

2) об'єм тіла обертання знаходять за формулою:

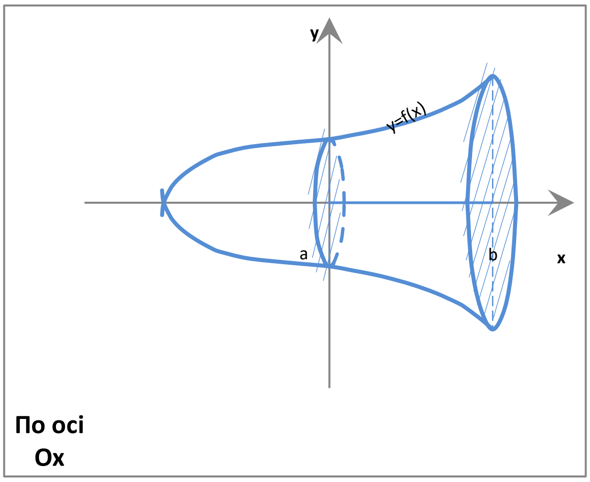
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

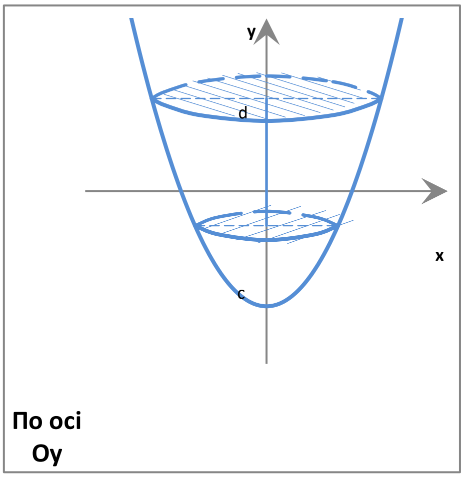
3) а площу поверхні обертання за формулою:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dy.$$

4) Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y=f_1(x), y=f_2(x)$, де $f_1(x)<f_2(x)$, та прямими $x=a, x=b$:

$$V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_2^2(x)\right)dx.$$





Навколо осі Oy:

1) $l = \int_c^d \sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy;$

2) $V = \pi\int_c^d f^2(y)\,dy;$

3) $S = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy;$

4) $V = \pi\int_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_2^2(y)\right)dy.$

Розділ 3. Невласні інтеграли

Означення. *За теоремою про існування визначеного інтеграла цей інтеграл існує, якщо:*

1) *відрізок інтегрування [a;b] скінчений;*
2) *підінтегральна функція $f(x)$ неперервна або обмежена і має скінчену кількість точок розриву.*

*Якщо хоча б одна з умов не виконується, то визначений інтеграл називають **невласним**.*

Якщо не виконується перша умова, тобто $a=-\infty$, або $b=\infty$, або $a=-\infty$ і $b=\infty$, то інтеграл називають ***невласним інтегралом з нескінченними межами:***

$$\int_a^{\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Якщо не виконується друга умова, то підінтегральна функція $f(x)$ має точки розриву другого роду на відрізку $[a;b]$. У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називають ***невласним інтегралом від розривної функції або від функції, необмеженої в точках відрізку інтегрування.***

Невласні інтеграли першого роду

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ \infty)$ і інтегрована на проміжку $[a;\ A]$, при чому $a <$ A. В цьому випадку для будь-якого A існує визначений інтеграл $\int_a^A f(x)\,dx$.

Скінченну чи нескінченну границю цього інтегралу, якщо $a \to \infty$, називають <u>невласним інтегралом I роду</u>:

$$(1)\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,dx.$$

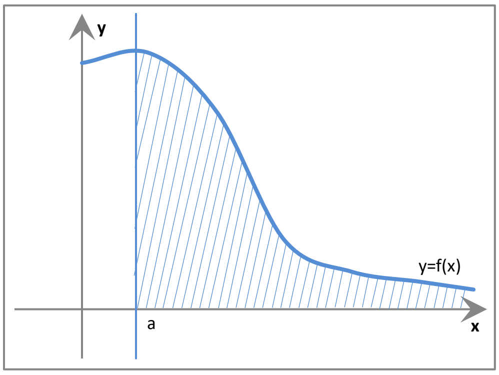
Якщо існує скінченна границя, то інтеграл називається <u>збіжним</u>, а якщо границя не існує або нескінченна, то інтеграл називається <u>розбіжним</u>.

$$(2)\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\,dx\,;$$

$$(3)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{C} f(x)\,dx + \int_C^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\int_B^C f(x)\,dx + \lim_{A\to\infty}\int_C^A f(x)\,dx.$$

Геометрично невласний інтеграл першого роду типу 1 – це площа нескінченної області, обмеженої згори графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ та віссю Ox.



Приклад. Дослідити невласні інтеграли на збіжність

а) $\int_1^{\infty}\frac{2dx}{x^3}$; б) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{9+x^2}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty}5e^x dx$.

Розв'язання: а) $\int_1^{\infty}\frac{2dx}{x^3}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2dx}{x^3}=2\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b^2}+1\right)=1$.

Отже, інтеграл існує, збіжний і дорівнює одиниці.

б) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{9+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^{0}\frac{dx}{9+x^2}=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\Big|_a^0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Невласний інтеграл існує, збіжний і дорівнює $\frac{\pi}{6}$.

в) $\int_{-\infty}^{\infty}5e^x dx=5\int_{-\infty}^{0}e^x dx+5\int_0^{+\infty}e^x dx=5\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\int_a^0 e^x dx\right)+5\lim\limits_{b\to\infty}\left(\int_0^b e^x dx\right)=5\lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^x\Big|_a^0\right)+$

$+5\lim\limits_{b\to\infty}\left(e^x\Big|_0^b\right)=5\lim\limits_{a\to-\infty}\left(e^0-e^a\right)+5\lim\limits_{b\to\infty}\left(e^b-e^0\right)=1-0+\infty-1=\infty$. Отже, невласний інтеграл розбіжний.

Невласні інтеграли другого роду.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$. Точку $x=b$ називають ***особливою точкою функції*** $y=f(x)$, якщо $f(x)\to\infty$, при $x\to b-0$.

Означення. *Якщо існує скінчена границя* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$, *то її називають* ***невласним інтегралом другого роду*** *і позначають* $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ необмежена на $[a;b]$, то її точки розриву можуть бути на лівому кінці, або на правому кінці, або в середині проміжку інтегрування.

В цих випадках невласні інтеграли визначаються:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо границі існують, то їх і називають невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Якщо границі не існують або є нескінченними, то невласний інтеграл ***розбіжний***.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_\varepsilon^1 \right) = \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

Невласний інтеграл існує, скінчений і дорівнює 1,5.

Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема. *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $(a;b)$, мають особливу точку $x = b$ і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, то із збіжності $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність $\int_a^b f(x)dx$, а з розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ - розбіжність $\int_a^b g(x)dx$.*

Наприклад, поскільки збігається інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, то збігається і $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 7x^2}}$, бо $0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x + 7x^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, для довільних $x \in (0;1]$.

Теорема. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *на проміжку [a;b) неперервні, додатні, а в особливій точці* $x=b$ *існує* $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ 0<k<+\infty$, *то інтеграли* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *і* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *одночасно збіжні або розбіжні.*

Теорема. *Якщо* $x=b$ *особлива точка функції* $f(x)$ *і* $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ *збігається, то* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *також збігається.*

Завдання для самостійної роботи

Невизначений інтеграл

1. Обчислити інтеграл, використовуючи методи безпосереднього інтегрування, заміни змінної, частинами

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
2. $\int(6x^5-5x^4+3x^2-2x+1)dx$
3. $\int\frac{x^3-3x^2+1}{x^5}dx$
4. $\int(7sinx-4cosx)dx$

14. $\int e^{\frac{-x}{4}}dx$
15. $\int ctgxdx$
16. $\int\frac{cosxdx}{5sinx-1}$
17. $\int\frac{xdx}{sin^2(x^2+1)}$

5. $\int (e^x - 3x)dx$

6. $\int (\frac{3}{sin^2x} + \frac{2}{cos^2x})dx$

7. $\int \frac{4sin^3x-5}{sin^2x}dx$

8. $\int \frac{2x^2+4}{1+x^2}dx$

9. $\int \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}dx$

10. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$

11. $\int 6^{\frac{x}{3}}dx$

12. $\int 2^{x^2}xdx$

13. $\int 7^{\sin x}\cos x dx$

14. $\int \frac{dx}{(5+\sqrt{x})^3\sqrt{x}}$

15. $\int \frac{e^{ctgx}+2sin^3x}{sin^2x}dx$

18. $\int \frac{xdx}{16+25x^2}$

19. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

21. $\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{8x}}}$

22. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

23. $\int \frac{x+\sqrt{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

24. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{4cos^2x}dx$

25. $\int \frac{\arcsin x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

26. $\int \frac{(1+x^2)^2+4x}{1+x^2}dx$

2. Знайти інтеграл, використовуючи виділення повного квадрату.

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 2) $\int \frac{dx}{x^2+6x}$ 3) $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$ 4) $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+3}$

5) $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+2x+10}$ 6) $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}-2e^x+6}$ 7) $\int \frac{cosxdx}{sin^2x-2sinx+2}$

8) $\int \frac{dx}{2x^2+5x+16}$ 9) $\int \frac{(4x-5)dx}{x^2-3x+5}$ 10) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+18x+2}}$

11) $\int \frac{(8x+11)dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}$

3. Знайдіть інтеграл, використовуючи розклад підінтегрального дробу у суму елементарних дробів.

1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ 2) $\int \frac{(2x^2+3x+6)dx}{(1+x)^2(4-x)}$ 3) $\int \frac{(x^2-5x)dx}{x^2-5x+6}$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)x}$ 5) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$ 6) $\int \frac{x^5dx}{8-x^3}$ 7) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$

8) $\int \frac{(x^3+x+2)dx}{(x-3)(x-4)}$ 9) $\int \frac{(x^2-4x)dx}{x^2+5x-6}$ 10) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$

3.Інтегрування виразів, що містять ірраціональності

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}dx$ 2) $\int (\sqrt[4]{x^9}+1)\sqrt[3]{x^2}dx$ 3) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$

4) $\int \sqrt[6]{x^5}(3-\sqrt[3]{x})dx$

4. Інтегрування тригонометричних функцій

1) $\int \frac{dx}{cos^4x}$ 2) $\int \frac{cos^3xdx}{sin^8x}$ 3) $\int \frac{cos^2xdx}{sin^6x}$ 4) $\int \frac{cos^3xdx}{\sqrt{sin\ x}}$

5) $\int \sqrt{\frac{sinx}{cos^9x}}dx$ 6) $\int sin7xsin2xdx$ 7) $\int cos^5xdx$

8) $\int sin^4xdx$ 9) $\int cos^2xsin^4xdx$ 8) $\int \frac{sinxdx}{sinx+cosx}$

10) $\int ctg^6xdx$ 11) $\int cos7xsin4xsinxdx$ 12) $\int \frac{dx}{4+3tgx}$

Визначений інтеграл

1) $\int_0^1 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$ 2) $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$

3) $\int_2^3 \frac{1}{x^2(x-1)}dx$ 4) $\int_4^5 \frac{1}{(x-1)(x+2)}dx$

5) $\int_3^4 \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$ 6) $\int_{-1}^1 \frac{y^5}{y+2}dy$

7) $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ 8) $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}dx$

9) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ 10) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

11) $\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$ 12) $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+cosx}dx$ 14) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos^3xsin2xdx$

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^2x+1}dx$ 16) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^2xdx$

17) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin3xcos5xdx$

Невласні інтеграли

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ 3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{10+x^2-6x}$

4) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ 5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$ 6) $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^3}$

7) $\int_0^{\infty} e^{-5x}dx$ 8) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ 9) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^2}$

10) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{10-2x+x^2}$ 11) $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

12) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{arctg4x}dx}{16x^2+1}$ 13) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2-4x}$ 14) $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(lnx-1)^2}$

Застосування інтегралів для обчислення площ плоских фігур, об'ємів та площ поверхонь тіл обертання

1. Обчислити площі областей, обмежених лініями:

   1) $y = -x^2+x+2$, $y=0$; 2) $y = (x + 1)^2$, $y=5 – x$, $y=0$;

   3) $y = \frac{2x}{\pi}$, $y = \sin x$, $x\geq 0$; 4) $y = -x^2 - 2x + 3$, $y = -6x + 7$;

   5) $y^2 = 2x + 1$, $x – y – 1 = 0$.

2. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями:

   1) $y = x^2 + 1$, $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $y = 0$, $(a>0)$ 2) $y = \sin x$, $y = 0$, $0\leq x \leq \pi$;

   3) $y = -x^2 + 3$, $x^2 + y^2 = 1$; 4) $y^2 = \frac{3}{2}x,\ x^2 + y^2 = 1, x \geq 0$

3. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі OY фігури, обмеженої лініями:

   1) $y = \frac{1}{2}x^2, y = 2$; 2) $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$;

   3) $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

4. Знайти довжину кривої y, якщо:

   1) $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3, x[1;4]$; 2) $y^2 = (x + 1)^3$, $x[-1;4]$;

   3) $y = \ln(1 - x^2)$, $x[0; \frac{1}{2}]$.

5. Знайти площу поверхні, яка утворюється обертанням навколо відповідних осей кривих:
   1) y = sinx, $0 \le x \le \pi$, навколо осі OX;
   2) $y = \frac{1}{2}x^2, 0 \le x \le 1{,}5$, навколо осі OY;
   3) y = tgx, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, навколо осі OX

Висновок

Методична розробка спрямована на вивчення і засвоєння студентами основних теоретичних понять з теми «Інтегральне числення», на застосування набутих знань до практичних задач з метою їх використання при вивченні спеціальних дисциплін, пов'язаних з загальною діяльністю фахівців. При цьому здійснюється розвиток пізнавальних можливостей, творчого мислення студентів, формування у них готовності до самостійного вивчення досягнень науки і техніки та активного їх використання у своїй професійній діяльності.

Враховуючи загальний рівень сприйняття навчального матеріалу та проблеми, що виникають у студентів при вивченні теми «Інтегральне числення», а також для підвищення мотивації слід частіше використовувати проблемне вивчення матеріалу, частково- пошукове або евристичне, дослідницьке. Підвищенню активізації пізнавальної діяльності студентів сприяє удосконалення методів реалізації практичної спрямованості вивчення інтегрального числення.

Перелік навчально – методичної літератури

1. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика, ч 2. – К.: НАУ Друк, 2009
2. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: Центр учбової літератури, 2009
3. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. - К.: Центр учбової літератури, 2005

4. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б. Алгебра і початки аналізу. – Харків: Гімназія, 2011
5. Грисенко М. В. Математика для економістів. – К.: Либідь, 2007
6. Задорожня Т. М., Руденко І. Б. Математика для економістів. – Ірпінь, 2015
7. Кузубов В. В., Чеберяк О. Г. Математика для економістів. – К.: Вища школа, 2004