

Методична розробка

"Похідні елементарних функцій"

Теоретичний матеріал

Похідні елементарних функцій

1. $c' = 0$, де c – константа (число)

2. $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$ 2а. $(x)' = 1$

3. $(\sin x)' = \cos x$

4. $(\cos x)' = -\sin x$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ 7а. $(e^x)' = e^x$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ 8а. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Наприклад.

Знайти похідну заданої функції:

1) $y = x^5$; $y' = 5x^4$

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$; $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

3) $y = 2^x$; $y' = 2^x \ln 2$

4) $y = x \cdot \sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$; $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

Основні правила диференціювання.
Похідна суми, добутку й частки двох функцій.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ деякі диференційовні функції, то:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, c - константа
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Наприклад: 1) $(x + 5)' = x' + 5' = 1 + 0 = 1$;

$$2) y = (x+5)(x^2-8); y' = (x+5)'(x^2-8) + (x+5)(x^2-8)' = (x^2-8) + (x+5) \cdot 2x = \\ = x^2 - 8 + 2x^2 + 10x = 3x^2 + 10x - 8.$$

$$3) y = \frac{1+9x}{2x-1}; y' = \frac{(1+9x)'(2x-1) - (1+9x)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{9(2x-1) - 2(1+9x)}{(2x-1)^2} = \\ = \frac{18x - 9 - 2 - 18x}{(2x-1)^2} = \frac{-11}{(2x-1)^2}.$$

Використовуючи правила знаходження похідних і знаючи табличні значення похідних елементарних функцій, можна знаходити похідні різних функцій.

Наприклад: Знайти похідну заданої функції:

$$1) y = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$$

$$y' = (3x^7)' - \left(\frac{5}{x^3}\right)' = 3 \cdot 7x^6 - 5 \cdot (x^{-3})' = 21 \cdot x^6 - 5 \cdot (-3)x^{-4} = 21x^6 + \frac{15}{x^4}.$$

$$2) y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 - x)$$

$$y' = (\sqrt{x})' (2x^2 - x) + \sqrt{x} (2x^2 - x)' = \frac{2x^2 - x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} (4x - 1) = \frac{2x^2 - x}{2\sqrt{x}} + 4x\sqrt{x} - \sqrt{x} = \\ = \frac{2x^2 - x + 8x \cdot x - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x^2 + 8x^2 - x - 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{10x^2 - 3x}{2\sqrt{x}}.$$

$$3) y = \frac{1+2x}{3-5x}$$

$$y' = \left(\frac{1+2x}{3-5x}\right)' = \frac{(1+2x)'(3-5x) - (1+2x)(3-5x)'}{(3-5x)^2} = \frac{2(3-5x) - (1+2x) \cdot (-5)}{(3-5x)^2} = \\ = \frac{6 - 10x + 5 + 10x}{(3-5x)^2} = \frac{11}{(3-5x)^2}.$$

$$4) y = \frac{\sin x}{25}; \text{ Знайти: } y' \left(\frac{-\pi}{2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{25} \cdot \sin' x = \frac{1}{25} \cdot \cos x,$$

$$y'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{25} \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{25} \cdot 0 = 0.$$

$$5) y = x^2 \log_2 x$$

$$y' = (x^2)' \log_2 x + x^2 (\log_2 x)' = 2x \cdot \log_2 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 2x \cdot \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}.$$

Система тренувальних вправ з теми “Похідна”

Знайти похідну елементарних функцій

Завдання	Відповіді
1) $y = 5x^3 + \ln x$	$y' = 15x^2 + \frac{1}{x}$
2) $y = 3x^2 - 5$	$y' = 6x$
3) $-17 \sin x + 1$	$y' = -17 \cos x$
4) $y = \cos x - \operatorname{tg} x$	$y' = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$
5) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$	$y' = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x$
6) $y = 3^x - 3x^2$	$y' = 3^x \ln 3 - 6x$
7) $y = 4^x + 5$	$y' = 4^x \ln 4$
8) $y = \sqrt{3} - 3 \operatorname{tg} x$	$y' = -\frac{3}{\cos^2 x}$
9) $y = 4 \arcsin x - 3 \ln x$	$y' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{x}$
10) $y = 7x \cdot \sqrt[3]{x^2}$	$y' = \frac{35\sqrt[3]{x^2}}{3}$

11) $y = 8x^2 \cdot \sqrt{x}$	$y' = 20 \cdot \sqrt{x^3}$
12) $y = -\frac{5}{x^8}$	$y' = \frac{40}{x^9}$
13) $y = \frac{1}{6x^6}$	$y' = -\frac{1}{x^7}$
14) $y = \frac{x^5}{2\sqrt{x}}$	$y' = \frac{9}{4}\sqrt{x^7}$
15) $y = \frac{2}{9x^3}$	$y' = -\frac{2}{3x^4}$
16) $y = 2x^5 - \frac{4}{x^2}$	$y' = 10x^4 + \frac{8}{x^3}$
17) $y = 3x^4 - \frac{5}{x^8}$	$y' = 12x^3 + \frac{40}{x^9}$
18) $y = \frac{x^5}{3} - \frac{x^4}{2}$	$y' = \frac{5x^4}{3} - 2x^3$
19) $y = \frac{x^7}{14} + \frac{6x^2}{12}$	$y' = \frac{1}{2}x^6 + x$
20) $y = 2\sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
21) $y = x \cdot \ln x$	$y' = \ln x + 1$
22) $y = \frac{\sin x}{25}$	$y' = \frac{1}{25} \cdot \cos x$

23) $y = \arcsin x \cdot \operatorname{ctgx}$

$$y' = \frac{\operatorname{ctgx}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\sin^2 x}$$

24) $y = \log_7 x \cdot e^x$

$$y' = \frac{e^x}{x \cdot \ln 7} + e^x \cdot \log_7 x = e^x \left(\frac{1}{x \cdot \ln 7} + \log_7 x \right)$$

25) $y = x^4 \cdot e^x$

$$y' = x \cdot e^x (4 + x^3)$$

26) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \arccos x$

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\ln \frac{1}{2} \cdot \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

27) $y = 4^x \cdot \log_5 x$

$$y' = 4^x \left(\ln 4 \cdot \log_5 x + \frac{1}{x \cdot \ln 5} \right)$$

28) $y = e^x \cdot \log_3 x$

$$y' = e^x \left(\log_3 x + \frac{1}{x \cdot \ln 3} \right)$$

29) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \arcsin x$

$$y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\ln \frac{1}{3} \cdot \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

30) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

31) $y = \frac{\sin x}{6^x}$

$$y' = \frac{\cos x \cdot 6^x - \sin x \cdot 6^x \cdot \ln 6}{6^{2x}} = \frac{\cos x - \ln 6 \cdot \sin x}{6^x}$$

32) $y = \frac{\ln x}{e^x}$

$$y' = \frac{1 - x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$$

$$33) y = \frac{\ln x}{3^x}$$

$$y' = \frac{1 - x \cdot \ln x \cdot \ln 3}{3^x}$$

$$34) y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

$$y' = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x} \cdot e^x}$$

$$35^*) y = \frac{\arccos x}{3e^x}$$

$$y' = -\frac{1 + \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x}{3\sqrt{1-x^2} \cdot e^x}$$

$$36^*) y = \frac{\arccos x}{\arcsin x}$$

$$y' = -\frac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2 x}$$