

УДК 373.5.016:512

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ РІВНЯНЬ ДВОХ ЗМІННИХ, ЩО МІСТЯТЬ МОДУЛЬ

У статті розглянуто два види рівнянь двох змінних, що містять модуль. На основі сформульованого орієнтуру побудови графіків рівнянь двох змінних, складено алгоритми побудови графіків кожного виділеного виду рівнянь. На прикладах показана реалізація зазначених алгоритмів та надано методичні коментарі.

Ключові слова: рівняння, рівняння двох змінних, графік рівняння.

Two types of equations of two variables containing a module are considered in the article. On the basis of the formulated guide for constructing graphs of the equations of two variables, algorithms for constructing graphs for each selected type of equations are compiled. The examples illustrate the implementation of these algorithms and provide methodological comments.

Keywords: equation, equation of two variables, graph of equation.

В програмі поглибленого вивчення математики зазначено, що необхідно формувати в учнів уміння розв'язувати рівняння двох змінних. Найскладнішими серед них для учнів є рівняння, що містять модуль. Тому вважаємо за необхідне розробити алгоритм побудови графіків таких рівнянь.

Нагадаємо відомі поняття та ознайомимось з новими, які пов'язані з ними.

Рівняння виду $F(x, y) = 0$ називають рівнянням з двома змінними.

Розв'язати рівняння означає знайти множину всіх його розв'язків або довести їх відсутність.

Пару чисел (x_0, y_0) називають розв'язком рівняння $F(x, y) = 0$, якщо $F(x_0, y_0) = 0$ – правильна числова рівність.

Графіком рівняння називають множину точок на координатній площині xOy , координати яких є розв'язком рівняння $F(x, y) = 0$.

Наприклад, графіком рівняння першого степеня є пряма ($ax + by + c = 0$), графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R$, де $R \neq 0$, є коло, графіком рівняння $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, є парабола.

Розглянемо побудови графіків окремих рівнянь за орієнтиром: для спрощення виразу з кількома модулями з двома змінними можна знайти нулі підмодульних виразів (тобто прирівняти їх до нуля) і розбити область визначення розглянутого виразу на кілька частин, у кожній з яких усі модулі розкриваються однозначно.

Побудова графіків рівнянь виду $|f(x)| \pm |g(y)| = a$

Використовуючи зазначений вище орієнтир, складемо алгоритм розв'язання рівнянь виду $|f(x)| \pm |g(y)| = a$.

- 1) Знайдемо область визначення функції.
- 2) Прирівняємо до нуля підмодульні вирази $f(x) = 0$ і $g(y) = 0$.
- 3) Розбиваємо координатну площину прямими $f(x) = 0$ і $g(y) = 0$ на чотири області.
- 4) У кожній із цих областей усі модулі розкриваємо однозначно і перетворюємо одержані рівності.
- 5) Будуємо відповідну частину графіка заданого рівняння.

Приклад 1. Побудуйте графік рівняння

$$|x - 1| + |y + 2| = 2$$

Розв'язання:

- 1) Область визначення: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
- 2) $x - 1 = 0$ при $x = 1$; $y + 2 = 0$ при $y = -2$.
- 3) Прямі $x = 1$ і $y = -2$ розбивають координатну площину на чотири частини, у кожній з яких визначаємо знаки першого і другого підмодульних виразів.

Дійсно, якщо точки розташовані в області I або на її межі, то їхні координати задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq -2, \end{cases}$

яку можна записати так $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ y + 2 \geq 0. \end{cases}$

Тому задане рівняння має вигляд: $x - 1 + y + 2 = 2$.

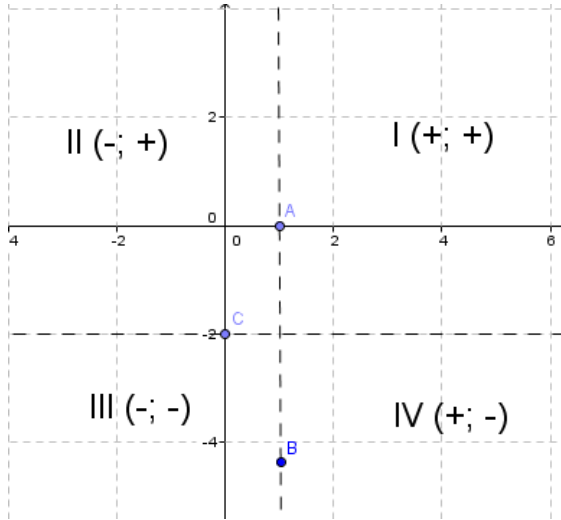


Рис.1

Звідси $y = -x + 1$.

Аналогічно для області II:

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ y \geq -2, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x - 1 \leq 0, \\ y + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Отже, в області II задане рівняння має вигляд $-x + 1 + y + 2 = 2$. Звідси $y = x + 1$.

Якщо точки розташовані в III області:

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ y \leq -2, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x - 1 \leq 0, \\ y + 2 \leq 0, \end{cases} \text{ із заданого рівняння одержує-}$$

мо: $-x + 1 - y - 2 = 2$.

Звідси $y = -x - 5$.

Якщо точки розташовані в IV області:

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ y \leq -2, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ y + 2 \leq 0, \end{cases} \text{ із заданого рівняння одержує-}$$

мо: $x - 1 - y - 2 = 2$. Звідси $y = x - 5$.

4) Будемо частину графіка функції у кожній області, а саме:

I) $y = -x + 1$

II) $y = x + 1$

III) $y = -x - 5$

IV) $y = x + 5$

Одержуємо графік рівняння на рис.2.

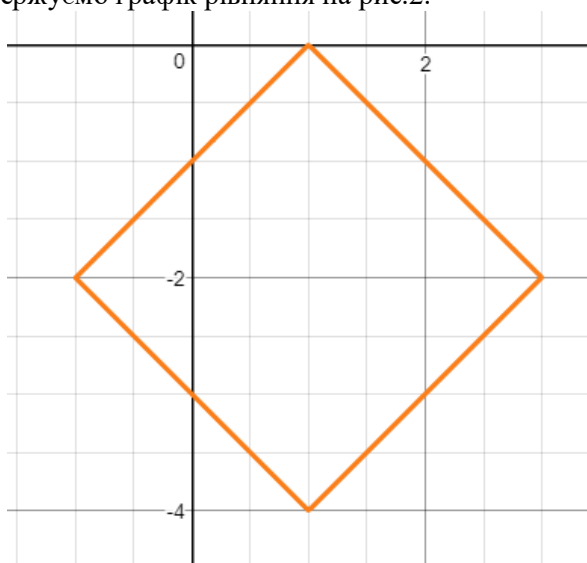


Рис. 2

Приклад 2. Побудуйте графік рівняння

$$|x + 3| - |2y - 2| = 4$$

Розв'язання:

- 1) Область визначення: $x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$.
- 2) $x + 3 = 0$ при $x = -3$; $2y - 2 = 0$ при $y = 1$.
- 3) Розбиваємо координатну площину прямими $x = -3$ і $y = 1$ на чотири частини і визначаємо знаки першого і другого підмодульних виразів.

I) $x + 3 - 2y + 2 = 4$; звідси $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

II) $-x - 3 - 2y + 2 = 4$; звідси $y = -\frac{1}{2}(x + 5)$

III) $-x - 3 + 2y - 2 = 4$; звідси $y = \frac{1}{2}(x + 9)$

IV) $x + 3 + 2y - 2 = 4$; звідси $y = -\frac{1}{2}(x - 3)$

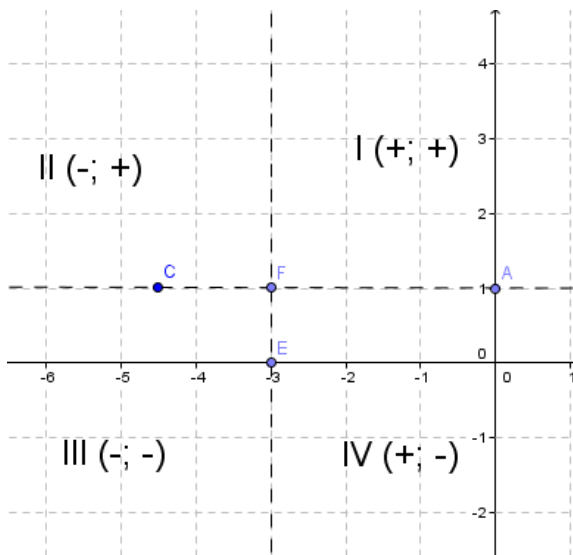


Рис.3

4) Будуємо графіки у визначених частинах.
Одержимо графік рівняння на рис.4.

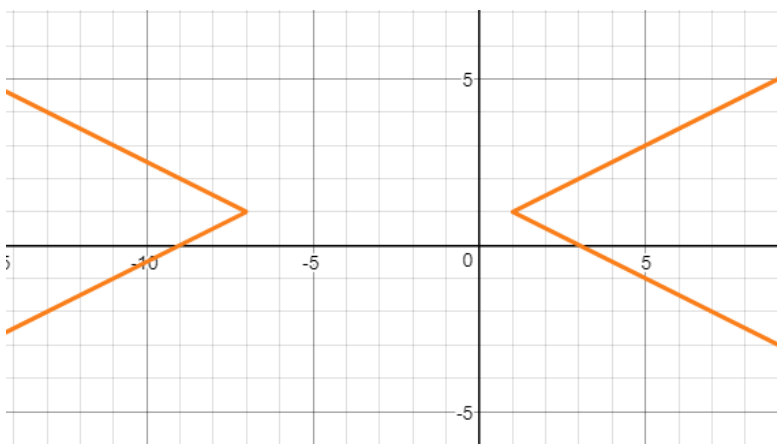


Рис. 4

Побудова графіків рівнянь виду $|f(x; y)| \pm |g(x; y)| = h(x; y)$

Використання орієнтиру побудови графіків рівнянь, що містять модулі дозволяє скласти алгоритм розв'язання таких прикладів:

- 1) Знайдемо область визначення функції.
- 2) Прирівняємо до нуля підмодульні вирази $f(x; y) = 0$ і $g(x; y) = 0$.
- 3) Розбиваємо координатну площину прямими $f(x; y) = 0$ і $g(x; y) = 0$ на чотири області.
- 4) У кожній із цих областей усі модулі розкриваємо однозначно і перетворюємо одержані рівності.
- 5) Будемо відповідну частину графіка заданого рівняння.

Приклад 3. Побудуйте графік рівняння

$$|3x + y| + |x - y| = 4$$

Розв'язання:

- 1) Область визначення: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
- 2) $3x + y = 0$ при $y = -3x$; $x - y = 0$ при $y = x$.
- 3) Розбиваємо координатну площину прямими $y = -3x$ і $y = x$ на чотири частини і визначаємо знаки першого і другого підмодульних виразів.

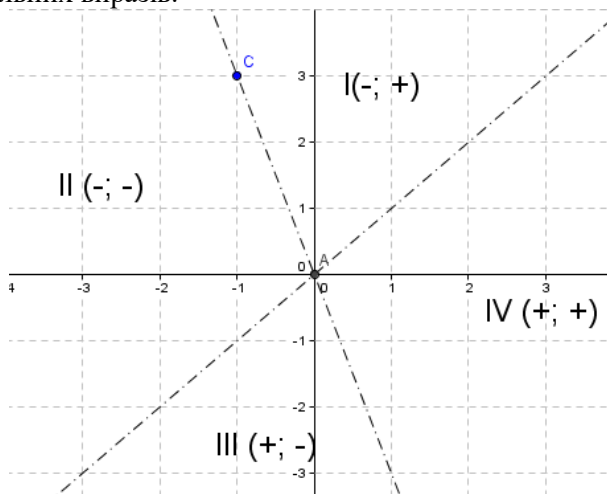


Рис. 5

I) $3x + y + x - y = 4$; звідси $x = 1$

II) $3x + y - x + y = 4$; звідси $y = 2 - x$

III) $-3x - y - x + y = 4$; звідси $x = -1$

IV) $-3x - y + x - y = 4$; звідси $y = -x - 2$

4) Будуємо графіки у визначених частинах.

Остаточний вигляд графіка наведено на рисунку 6.

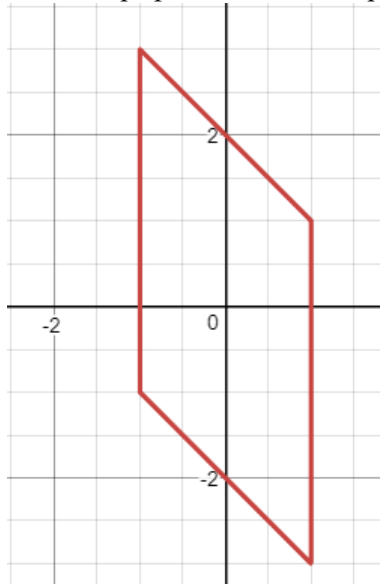


Рис. 6

Приклад 4. Побудуйте графік рівняння

$$|3x + y| - |x - y| = 4$$

Розв'язання:

1) Область визначення: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

2) $3x + y = 0$ при $y = -3x$; $x - y = 0$ при $y = x$.

3) Розбиваємо координатну площину прямими $y = -3x$ і $y = x$ на чотири частини і визначаємо знаки першого і другого підмодульних виразів.

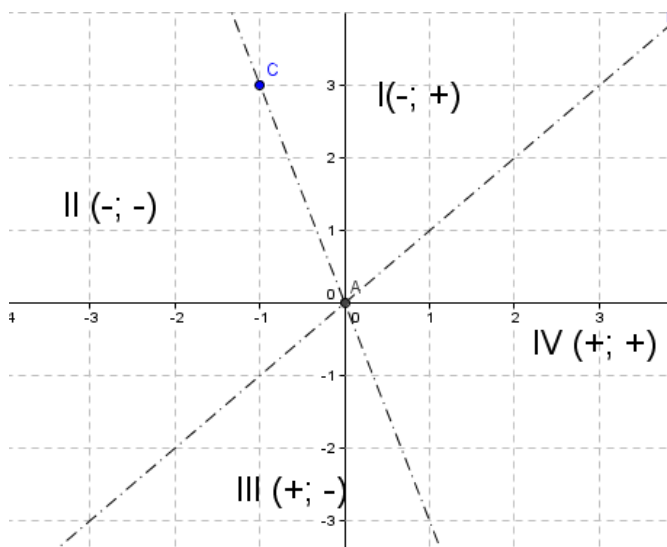


Рис. 7

I) $3x + y - x + y = 4$; звідси $y = 2 - x$

II) $3x + y + x - y = 4$; звідси $x = 1$

III) $-3x - y + x - y = 4$; звідси $y = -2 - x$

IV) $-3x - y - x + y = 4$; звідси $x = -1$

4) Будемо графіки у визначених частинах.

Остаточний вигляд графіка наведено на рисунку 8.

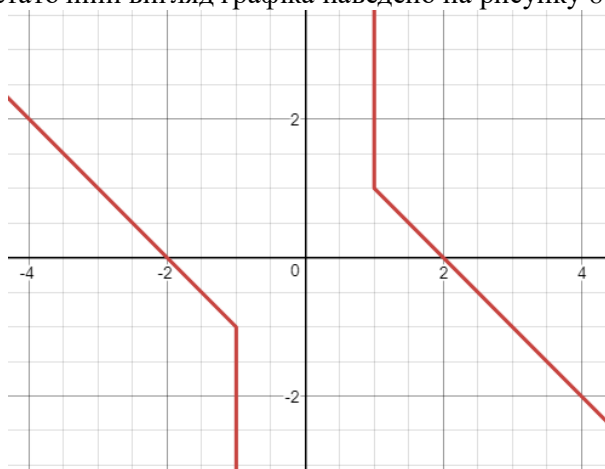


Рис.8

Отже, відпрацювання з учнями вказаних алгоритмів при побудові графіків рівнянь двох змінних сприятиме кращому розумінню ними даної теми, набуттю навичок розв'язувати задачі, у яких рівняння і нерівності використовуються як математичні моделі реальних ситуацій.

Список використаних джерел:

1. Мерзляк А.Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. Гімназія, 2017. – 416 с. : іл.
2. Нелін Є.П. Алгебри і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є.П. Нелін . – Х. Гімназія, 2010. – 416 с.