Олевська Ю.Б., Сидоренков Є.Є.
УДК 005.517.9

Диференціальний метод розв’язування фізичних задач у середній школі

Укладачі:
Сидоренков Є.Є., учитель фізики вищої категорії «КЗО СЗШ № 19», м. Дніпропетровськ ;
Олевська Ю.Б., канд. фіз. мат. наук,доцент, ДВНЗ НГУ.

Передмова

На попередньому факультативному занятті було розглянуто інтегральний метод розв’язування фізичних задач.

Але велика кількість фізичних величин функціонально залежні одна від іншої таким чином, що для визначення однієї фізичної величини необхідно визначати похідну функції іншої фізичної величини. Так, між собою залежні координата, швидкість та прискорення руху матеріальної точки, сила струму та заряд, електрорушійна сила та магнітний потік та інші. Від швидкості зміни однієї фізичної величини залежить значення іншої.

У багатьох випадках при розв’язуванні задачі виникає необхідність аналізу функції фізичної величини шляхом визначення її похідної для визначення екстремуму функції.

Таким чином, рішення багатьох фізичних задач шкільної програми мають чітку спрямованість на використання навичок учнів щодо визначення похідної функції фізичної величини. Але збірники задач з фізики для 10,11 класів [1,2] взагалі або майже не вміщують задач, які можливо розв’язати вищевказаним методом.

У факультативному занятті № 2 представлено диференціальний метод (ДМ), наведені приклади рішення фізичних задач з його використанням, наведені умови задач для самостійного розв’язання.

Олевська Ю.Б., Сидоренков Є.Є.

Фізика. 11 клас .

Факультативне заняття №2 .

Тема: Диференціальний метод розв’язування задач (ДМ).

Мета: Ознайомитись з ДМ, сформувати навички використання ДМ при розв’язуванні типових фізичних задач.

Тип уроку: Закріплення знань, формування умінь і навичок.

Теоретичні відомості про ДМ.

Задачі, що розв’язуються з використанням ДМ, можна розподілити на дві групи:

1. Задачі, у яких рішення отримується у вигляді рівняння фізичної величини як функції часу або іншого параметру у результаті пошуку похідної функції відомої фізичної величини;

2. Задачі, у яких рішення отримується у результаті дослідження функції і пошуку її екстремуму.

Суттєвий зміст ДМ вбачається у наступному.

Із умови задачі визначити відповідність між відомими фізичними величинами та тими фізичними величинами, значення яких потрібно знайти, користуючись відомими визначеннями або законами фізики. Так фізична величина x(t), яка є функцією часу, своєю похідною має швидкість зміни свого значення з часом v(t), похідна якої також швидкість зміни її значення у часі a(t). Для кінематичних задач ці фізичні величини мають зміст координати, миттєвих швидкості і прискорення матеріальної точки. Для найпростішої функціональної залежності фізичних величин, а саме прямо пропорційної, маємо:

$x(t) = v \cdot t$ (1) .

Похідна:

$\dot{x}\ (t) = v(t)$ (2).

Одночасно абсолютні значення $\tan\alpha = v$, де α- кут нахилу графіка функції $x(t)$ до осі часу. На рис.1 зображено графік $x(t) = 3t$, розрахунок $\dot{x}\ (t) = 3$ дає у результаті значення швидкості зміни $x(t)$. Фізична величина $x(t)$ може бути координатою рівномірного руху матеріальної точки, зарядом, що біжить у провіднику циліндричної форми через його переріз, магнітний потік у просторі, робота сили та інші. Відповідно v буде дорівнювати значенню швидкості матеріальної точки, силі струму, електрорушійній силі, потужності.

При більш складній функціональній залежності від часу $x(t)$ значення $\dot{x}\ (t)$ дає можливість визначити функцію залежності $v(t)$ і її миттєве значення. На рис.2 наведений графік $x(t) = t^3$, значення похідної $\dot{x}\ (t) = 3t^2$. Таким чином, $v(t) = 3t^2$. За цим рівнянням розраховується швидкість зміни фізичної величини у різні миттєвості часу. За значенням вони різні та дорівнюють $\tan\alpha$ дотичних до графіку функції у відповідних точках.

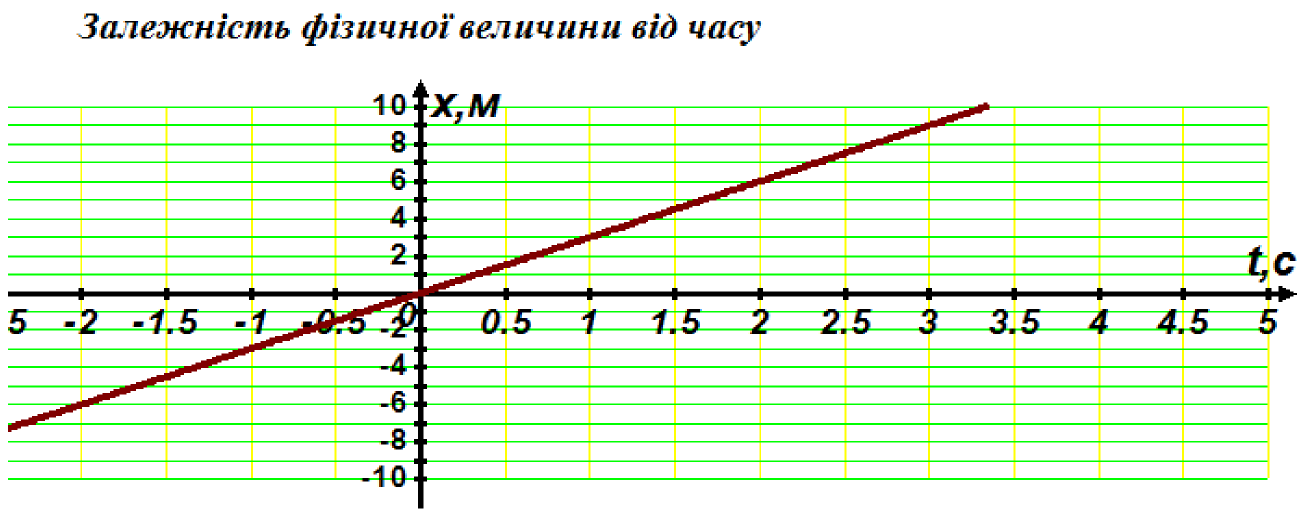


Рис.1. Прямо пропорційна залежність X(t).

Рис. 2. Дотичні до графіку функції у різних точках.

Приклади розв'язування задач.

Задачі з визначенням похідної функції можна класифікувати відповідно до алгоритму розв'язання:

1.Отримання рівняння шуканої фізичної величини за рахунок диференціювання функції іншої величини;

2.Отримання похідної для пошуку екстремуму функції.

Прикладом задачі, що відповідає пункту 1, можна вважати задачу на пошук значення швидкості руху матеріальної точки у заданий час при відомому рівнянні руху.

Умови задачі 1 : тіло рухається прямолінійно вздовж вісі ОХ за законом :

$x(t) = 3\,t^3 + 4\,t^2 - t$. Визначити значення швидкості через 6 секунд після початку руху тіла. Рівняння руху подане у одиницях вимірювання системи SI.

Для розв'язання задачі винайдемо похідну $\dot{x}(t)$. Результатом диференціювання рівняння $x(t)$ має стати рівняння швидкості:

$v(t) = 9\,t^2 + 8\,t - 1$. Підставивши у рівняння швидкості значення часу, отримаємо результат : $v(6) = 371\frac{м}{с}$.

Подібним чином розв'язується задача пошуку зарядного струму конденсатора.

Умови задачі 2: напруга на конденсаторі ємністю 50мкФ змінюється за законом $U(t) = 210 \sin 314t$. Обчислити зарядний струм через конденсатор.

У рішенні задачі використаємо зв'язок між фізичними величинами сили струму I, зарядуQ і ємності C:

I(t)=$\frac{dQ}{dt}$; Q(t)=U(t) C.

Вважаючи Q(t)= C $U_м \sin wt$, маємо I(t)=$\frac{dQ}{dt} = C\,wU_м\, \cos wt$.

Розрахунок дає результат: I(t) = 50· $10^{-6}Ф \cdot 314с^{-1} \cdot 210В \cos 314t$ ≈3,3$\cos 314t$ A.

Прикладом задачі, що відповідає пункту 2, може бути задача на визначення мінімальної відстані між рухомими автомобілями.

Умови задачі 3: два автомобіля одночасно почали рух згідно до графіків траєкторій руху (див.рис.1), що нанесені штрихованими лініями, зі швидкостями $v_1 = 15\frac{м}{с}, v_2 = 10\frac{м}{с}$ відповідно. Визначити мінімальну відстань, що виникає між автомобілями.

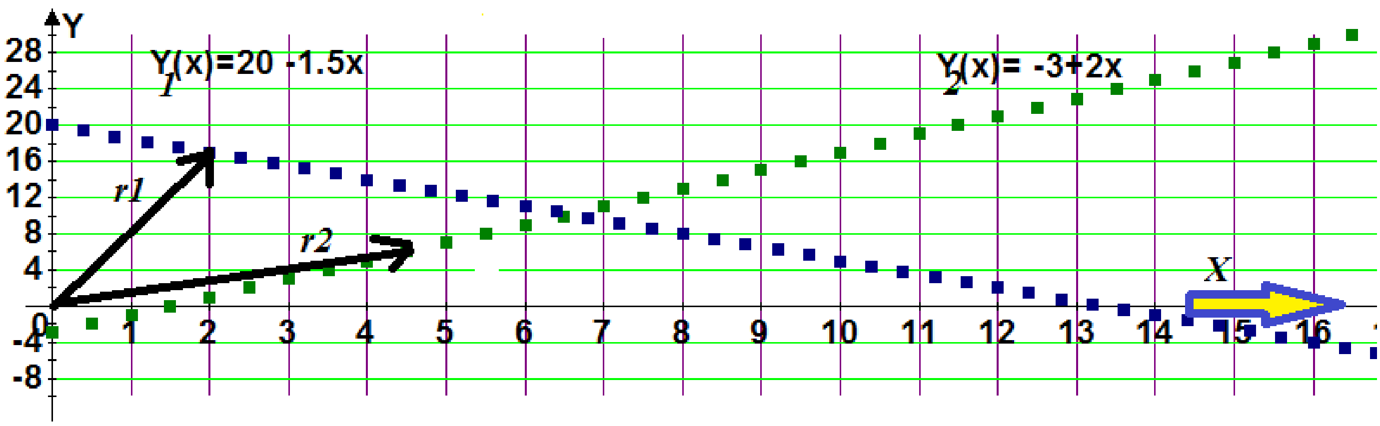


Рис.3. Графіки траєкторій руху.

Положення автомобіля на координатній площині можна визначити, користуючись координатами відповідного вектора **r**:

$\boldsymbol{r_1} = \mathrm{y}_1(t)\boldsymbol{j} + \mathrm{x}_1(t)\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r_2} = \mathrm{y}_2(t)\boldsymbol{j} + \mathrm{x}_2(t)\boldsymbol{i}$, де $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}$ одиничні вектори вздовж осі Oy та Ox відповідно, $\mathrm{y}\,(t), \mathrm{x}\,(t)$ - відповідні координати руху, що змінюються з часом за законами :

$$\mathrm{y}_1(t) = 20 - v_{\mathrm{y}1}t,\ \mathrm{y}_2(t) = -3 + v_{\mathrm{y}2}t,\ \mathrm{x}_1(t) = v_{\mathrm{x}1}t, \mathrm{x}_2(t) = v_{\mathrm{x}2}t \quad (*).$$

Рівняння для координат скалярні і вміщують значення проекцій швидкостей v_{y} та v_{x} на відповідні координатні осі . У свою чергу проекції швидкостей можна розрахувати через кути нахилу α та β векторів $\boldsymbol{v_1}$ та $\boldsymbol{v_2}$ до координатної осі 0x. Рівняння (*) будуть мати вигляд:

$$\mathrm{y}_1(t) = 20 - v_1 \sin\alpha\, t, \mathrm{y}_2(t) = -3 + v_2 \sin\beta\, t, \mathrm{x}_1(t) = v_1 \cos\alpha\, t,$$
$$\mathrm{x}_2(t) = v_2 \cos\beta\, t\,.$$

Оскільки напрям вектора швидкості збігається з напрямом руху, то за значеннями координат траєкторії:

$\tan\alpha = \frac{20}{13{,}5} = 1{,}48, \tan\beta = \frac{3}{1{,}5} = 2$, де α і β кути нахилу до осі 0x швидкостей $\boldsymbol{v_1}$ та $\boldsymbol{v_2}$ відповідно. Таким чином:

$$\sin\alpha = 0{,}83, \sin\beta = 0{,}89, \cos\alpha = 0{,}56, \cos\beta = 0{,}45.$$

Поточна відстань між автомобілями на координатній площині розраховується через координати відповідних векторів $\boldsymbol{r_1}$ та $\boldsymbol{r_2}$:

$$\mathrm{R(t)} = \sqrt{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = \sqrt{(y_2(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - x_1(t))^2}$$

Підставивши у рівняння поточної відстані R(t) значення координат відповідно до рівняння (*), значення швидкостей і тригонометричних функцій кутів нахилу, маємо:

$$\mathrm{R(t)} = \sqrt{(-3 + \mathrm{v}_2 \sin\beta \mathrm{t} - (20 - \mathrm{v}_1 \sin\alpha\, \mathrm{t}))^2 + (\mathrm{v}_2 \cos\beta\, \mathrm{t} - \mathrm{v}_1 \cos\alpha\, \mathrm{t})^2}$$
$$= \sqrt{(-23 + 8{,}9\mathrm{t} + 12{,}45\mathrm{t})^2 + (4{,}5\mathrm{t} - 8{,}4\mathrm{t})^2} = \sqrt{(-23 + 21{,}35\mathrm{t})^2 + (3{,}9\mathrm{t})^2} =$$
$$= \sqrt{(-23 + 21{,}35\mathrm{t})^2 + 15{,}21\mathrm{t}^2} \approx \sqrt{529 - 491\,\mathrm{t} + 471\,\mathrm{t}^2} \quad (**).$$

Після пошуку похідної $\dot{\mathrm{R}}(\mathrm{t})$ маємо розв'язати рівняння $\dot{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = 0$ відносно t, оскільки воно являється умовою екстремуму функції $\mathrm{R(t)}$. Значення t підставимо у рівняння (**) і знайдемо шукане значення R.

$\dot{\mathrm{R}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\sqrt{529 - 491\,\mathrm{t} + 471\,\mathrm{t}^2}}(-491 + 471\mathrm{t}).$ Екстремум функції досягається при t ≈1с.

Розрахуємо мінімальну відстань між автомобілями:

$$R_{min} = \sqrt{529 - 491 + 471} = 22{,}56\ \text{м}.$$

Інша задача, що відповідає пункту 2, дає можливість розрахувати максимальне значення споживаної потужності електричного кола у залежності від параметрів джерела живлення.

Умови задачі 4: визначити силу струму , що відповідає максимальному значенню споживаної потужності, якщо ЕРС та внутрішній опір джерела відповідно дорівнюють 20 В та 2,5 Ом[3].

При розв'язанні задачі слід використати визначення фізичних величин - потужності P, сили струму I, ЕРС ε та внутрішнього опору r джерела струму.

За умови збереження електричної енергії, споживана потужність може бути визначена рівнянням:

$P_с = P_з - P_в$, (*) де $P_з$ -загальна потужність кола, $P_в$- потужність споживання джерела струму.

Підставивши у рівняння (*) замість $P_з$ та $P_в$ їх залежність від сили струму за визначенням, маємо:

$P_с(I) = \mathrm{I} \cdot \varepsilon - \mathrm{I}^2 \cdot r$ (**).

Похідна функції $P_с(\mathrm{I})$ має вигляд: $\dot{P}_с(\mathrm{I}) = \varepsilon - 2\mathrm{I} \cdot r$. Екстремум функції має бути визначений за умови $\dot{P}_с(\mathrm{I}) = 0$. Таким чином, сила струму $\mathrm{I} = \frac{\varepsilon}{2r}$. Розрахунок дає значення сили струму: $\mathrm{I} = \frac{20В}{2 \cdot 2{,}5\ Ом} = 4А$.

Аналіз рівняння (**) дає можливість порозуміти, що при значеннях струму I= 0А та $\mathrm{I} = \frac{\varepsilon}{r} = 8А$ споживана потужність $P_с$= 0 Вт. Тому робимо висновок таким, що значення струму I= 4А відповідає максимальному значенню $P_{с\ макс}$ = 40 Вт.

Пошук похідної функції фізичної величини може використовуватись у якості додаткової процедури у загальному алгоритмі рішення задачі.

Умови задачі 5: на нерухомому блоці масою 10 кг, що може обертатися на горизонтальній вісі без тертя, висить вантаж масою m на тонкій нитці, що намотана на блок (рис.4). Блок має форму диску радіусом 20 см. У результаті дії сили натягу нитки він починає обертатися за законом: $\varphi(t) = t^2 + 2t - 8$ Визначити масу m .

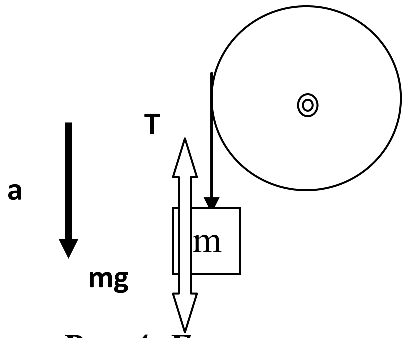


Рис.4. Блок з вантажем.

Для розв'язування задачі використаємо рівняння динаміки обертального руху блока:

$\mathrm{M} = \mathrm{j} \cdot \beta$ (*), де М- момент сили, що діє на блок, j – момент інерції блока, β – його кутове прискорення. Момент інерції диску:

$\mathrm{j} = \frac{MR^2}{2}$ (**), де R – радіус диску, $\boldsymbol{M}$ - маса блока.

Вантаж m рухається з прискоренням **a**, значення якого розраховується за формулою: $\mathrm{a} = \beta \cdot \mathrm{R}$. Таке прискорення вантаж отримав за законом Ньютона завдяки дії сил тяжіння mg і натягу нитки T. У проекції на вертикальну вісь рівняння руху вантажу записується у вигляді:

$mg - T = ma$ (***).

Момент сили M визначається через значення сили T натягу нитки, що діє на блок і вантаж у протилежних напрямках : M = TR.

Підставивши значення фізичних величин з рівняння (**), та (***) у рівняння (*), маємо:

$$m(g - \beta R)R = \frac{MR^2}{2} \cdot \beta \ .$$

Кутове прискорення визначається подвійним диференціюванням рівняння обертального руху блока:

$$\beta = \ddot{\varphi}(t) = 2\,\frac{1}{c^2}.$$

Таким чином, масу вантажу розрахуємо за формулою:

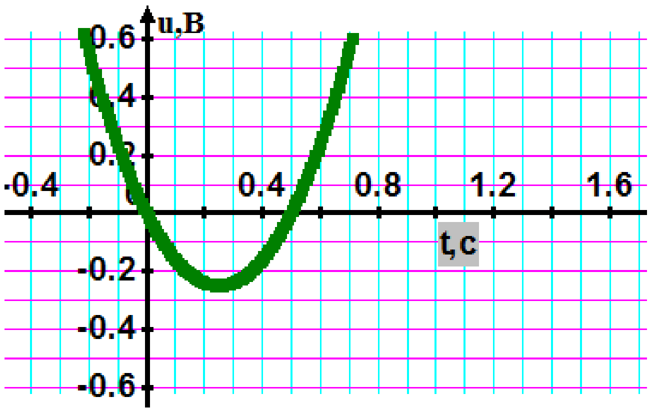
$$m = \frac{MR}{2(g - \beta R)} \cdot \beta \ .$$

Результат розрахунків:

$$m = \frac{10\ \text{кг} \cdot 0{,}2\ \text{м}}{2\left(9{,}8\frac{\text{м}}{c^2} - 2\frac{1}{c^2}0{,}2\ \text{м}\right)} \cdot 2\frac{1}{c^2} \approx 0{,}2\ \text{кг}.$$

Умови задачі 6: електричне коло складається із послідовно сполучених конденсатора ємністю C=1000мкФ і активного опору R=1200 Ом. Від джерела струму подається напруга, що залежить від часу U_0(t) = $4t^2 - 2t$. Визначити напругу на активному опорі U_R через чверть секунди після початку зарядки конденсатора, якщо U_R(t) $\ll$ U_0(t).

Залежність напруги від часу



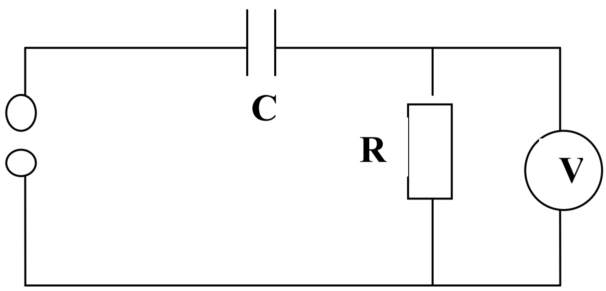


Рис.5. Електричне коло і графік залежності напруги від часу.

При появі змінної напруги $\boldsymbol{U_0}$ на затискачах джерела струму, конденсатор має заряджатися. При цьому зарядний електричний струм має бігти через опір **R** . Для послідовного електричного ланцюга маємо:

U_0(t)= $U_R(t) + U_c(t)$, де $U_c(t)$ - напруга на конденсаторі.

За законом Ома для ділянки кола з опором R маємо $U_R(t) = I(t)R$. За визначенням сили струму: $I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathrm{C}dU_c(t)}{dt}$.

Враховуючи умову $U_R(\mathrm{t}) \ll U_0(\mathrm{t})$, маємо диференційний ланцюг, на якому вихідні параметри напруги $U_R(\mathrm{t})$ являються похідною від функції вхідної напруги $U_0(\mathrm{t})$, а саме : $\dot{U_0}(t) = U_R(\mathrm{t})$, оскільки $U_0(\mathrm{t}) \approx U_c(t)$.
Таким чином:

$$U_R(\mathrm{t}) = \mathrm{RC}\frac{dU_0(t)}{dt} = 1200\ \text{Ом} \cdot 1000 \cdot 10^{-6}\ \Phi \cdot (8 \cdot 0{,}25 - 2)\frac{\text{В}}{\text{с}} = 0\text{В}.$$

Робимо висновок: струм у колі через 0,25 с відсутній.

Використати ДМ можливо не тільки при умові залежності фізичної величини від часу. У наступній задачі визначається умова найменшого значення часу як функції координати.

Умова задачі 7: з пункту А на березі прямокутного озера треба потрапити в пункт В на протилежному березі (рис.6). Людина пливе через озеро на човні зі швидкістю v_1 =1 м/с, а далі іде пішки зі швидкістю v_2 =4 м/с. Визначити напрямок руху людини, при якому час мандрівки буде найменшим [4].

Від А до С мандрівка людини буде тривати проміжок часу:

$$\mathrm{t}_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2}}{\mathrm{v}_1}$$, а від В до С:

$$\mathrm{t}_2 = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}-\mathrm{x})^2+\mathrm{b}^2}}{\mathrm{v}_2}.$$

Загальний час $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2$.
Умова екстремуму функції t(x) $\frac{dt}{dx} = 0$.

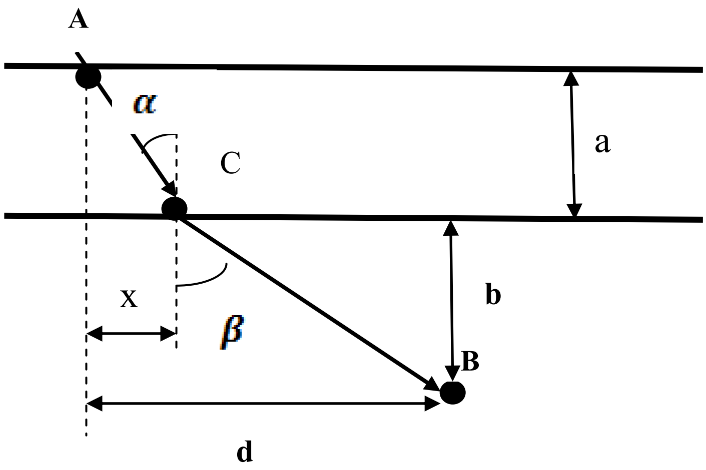


Рис.6. Напрямок мандрівки людини.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+\mathrm{a}^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0.$$

Оскільки $\frac{x}{\sqrt{x^2+\mathrm{a}^2}} = \sin\alpha, \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin\beta$, то $\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0.$

Таким чином: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}.$

У залежності від швидкостей руху на човні і пішки людина має додержуватись означених напрямків руху.

Умова задачі 8: залізний диск радіусом R=50 см, що розміщений вертикально, обертається у магнітному полі з індукцією В=0,8Тл навкруги своєї центральної вісі з кутовою швидкістю w = 10 c^{-1}. Площина диску перпендикулярна до горизонтальних ліній індукції магнітного поля, напрям вісі обертання збігається з напрямом вектора індукції В. Визначити електрорушійну силу, яка виникає на контактах **а** і **в**, що ковзають по поверхні диску(рис.7)[5].

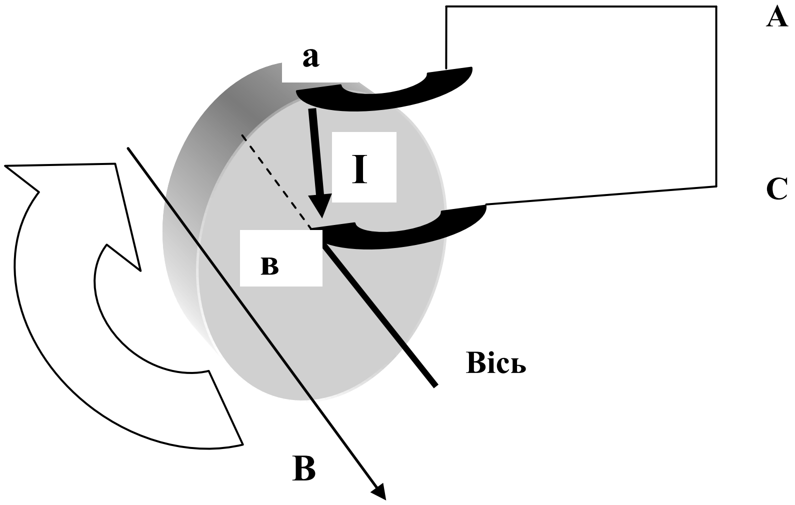


Рис.7. Диск, що обертається у магнітному полі.

За допомогою контактів **а** і **в** складене замкнене коло **а в** С А. При обертанні диску, за законом електромагнітної індукції, на контактах **а** і **в** виникає ЕРС $\boldsymbol{\varepsilon}$ індукції, а у колі виникає сталий струм I.

При повертанні диску на малий кут $d\varphi$ радіус диску |**а в**|$= R$ повертається на такий же кут і «замітає» у просторі площу $dS = \frac{1}{2}R^2\, d\varphi$. Потік магнітної індукції через площину $d\phi = B\,dS$, а швидкість його зміни $\frac{d\phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\varphi}{dt}$. За законом електромагнітної індукції:

$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}BR^2 w$, де $w = \frac{d\varphi}{dt}$ - кутова швидкість обертання диску.

Розрахуємо ЕРС: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}0{,}8\text{ Тл}\cdot 0{,}25\text{ м}^2\cdot 10\text{с}^{-1}$= 2В.

Мотузка, що висить

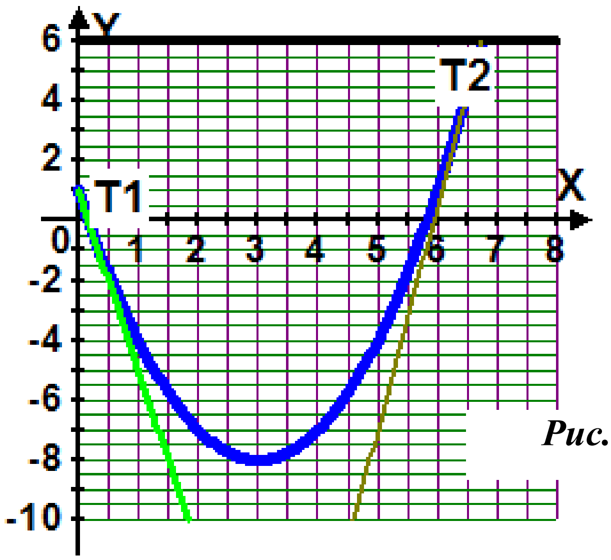


Рис.8. Мотузка.

Умова задачі 9: мотузка, що підвішена за дві точки (рис.8, блакитний колір), огинає у повітрі параболу $y = 1 + x^2 - 6x$. Сили натягу мотузки у точках кріплення $\mathrm{T}_1 = 4\text{Н}, \mathrm{T}_2 = 6\text{Н}$. Визначити силу тяжіння, що діє на мотузку.

Для рішення задачі скористаємось законом Ньютона:

$\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_т} = 0$, де $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ - сили реакції підвісів у точках кріплення, що діють на мотузку, $\boldsymbol{F_т}$ - сила тяжіння.

Додаток проекцій цих сил на вертикальну вісь O Y: $F_{1y}+F_{2y} - F_{ту} = 0$.

За іншим законом Ньютона: сили $\boldsymbol{F_1} = -\mathrm{T}_1, \boldsymbol{F_2} = -\mathrm{T}_2$ і діють у напрямках дотичних до мотузки у відповідних точках . Цей напрямок можливо визначити дослідивши значення похідної функції $y(x)$ форми мотузки у точках підвісу: $\dot{y} = 2x - 6$.

Визначимо координати точок підвісу: $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, координата x_2 визначається після розв'язання рівняння $6 = 1 + x^2 - 6x$, оскільки підвіс другої точки знаходиться на 5 одиниць вище, ніж першої : $y_2 = 6$ $x_2 = 6{,}74$. Таким чином, значення похідної у точках підвісу $\dot{y}_1 = -6$, $\dot{y}_2 = 7{,}48$. Рівняння дотичних прямих з використанням значень похідної будуть мати вигляд: $y_1 = 1 - 6x$, $y_2 = 7{,}48x - 44{,}4$. Вони перетинаються у точці, абсцису x_0 якої винайдемо з умови: $1 - 6x_0 = 7{,}48x_0 - 44{,}4$, звідкіля витікає: $x_0 = 3{,}368$.

Координата x_0 належить вертикалі, вздовж якої діє сила тяжіння $\boldsymbol{F_т}$, що прикладена до мотузки. Визначимо її значення з рівняння проекцій сил: $F_{1y}+F_{2y} = F_{ту}$. Значення похідної співпадає зі значеннями тангенсів кутів нахилу прямих до вісі O X : $\tan\alpha_1 = -6, \tan\alpha_2 = 7{,}48$. Для визначення проекцій сил на вертикальну вісь використаємо значення $\sin\alpha_1 = 0{,}986$, $\sin\alpha_2 = 0{,}99$. Розрахувавши значення $F_{1y} = 4\text{Н} \cdot 0{,}986 = 3{,}944\text{Н}$, $F_{2y} = 6\text{Н} \cdot 0{,}99 = 5{,}94\text{Н}$, маємо значення сили тяжіння $F_{ту} = 9{,}884\text{Н}$.

Нижче наведено умови задач для самостійного розв'язання.

1.Яку максимальну потужність споживає електродвигун, що ввімкнули у мережу сталого струму напругою 220 В, якщо повний електричний опір кола становить 44 Ом? Який струм при цьому тече у колі? (Відповідь: 275 Вт, 2,5А) [3].

2. Мідний диск радіусом 50 см, що розташований перпендикулярно до ліній магнітної індукції Землі, обертається з частотою 50 обертів за секунду. Визначити різницю потенціалів між центром і краєм диску. Магнітна індукція Землі B= 50 мкВб. (Відповідь: 2 мВ) [5].

3. Матеріальна точка масою 10 кг рухається прямолінійно під дією сили F(x). Робота A(x) сили залежить від координати за законом: $A(x)=5x^2+4x$. Визначити прискорення a точки в координаті x=20м. (Відповідь: a = 20.4 $\frac{м}{c^2}$).

4.Визначити струм у кінці п'ятої секунди, якщо відомо, що заряд, що протікає через провідник, починаючи з моменту t=0c дорівнює $q(t) = 2t^2 + 3t + 1$ (Кл). (Відповідь: 23А) [6].

5.Військовий корабель рухається океаном на схід зі швидкістю 15 вузлів. Підводна субмарина у цей час рухається сталим курсом зі швидкістю 26 вузлів на відстані 6 міль на півдні від корабля. Через де який час субмарина опинилась на мінімальній відстані від корабля, яка складає 3 мілі. Розрахувати курс корабля і час, що минув між двома вищевказаними положеннями корабля і субмарини. (Відповідь: виключно на північ, 0,17 год) [7].

Література.

1. Божинова Ф.Я. Физика Академический уровень: Сборник задач 10 класс / Ф.Я. Божинова , Е.А.Карпухина – Х.: Ранок , 2010. – 192с.

2. Божинова Ф.Я. Физика. Академический и профильный уровень: Сборник задач 11 класс / Ф.Я. Божинова , Е.А.Карпухина ,Т.А.Сарий. – 2-е изд., перераб. и доп. –Х.: Ранок , 2011. – 224с.

3. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике / Н.И.Гольдфарб.– 2-е узд.– М.: Высшая школа , 1969 . –288 с., стр.104.

4. Гончаренко С.У. Фізика. Олімпіадні задачі /С.У.Гончаренко, Є.В.Коршак – Тернопіль: Навчальна книга,1999. – 200с., стор.6.

5.Фриш С.Э. Курс общей физики том 2: Электрические и электромагнитные явления / Фриш С.Э., А.В.Тиморева.– 9-е изд., перераб. и доп.– М.: государственное издательство физико-математической литературы, 1962.– 516 с., стр. 413.

6. Кагадій Т.С. Методичні вказівки до розв'язання прикладних задач з вищої математики/ Кагадій Т.С. – Д.: Національний гірничий університет, 2005. –29с., стор.3.

7. Фейнмановские лекции по физике под редакцией Леванюка А.П.: Задачи и упражнения с ответами и решениями – М.: Мир , 1969 . – 624с., стр.34.