Практичне заняття.

Тема: Обчислення границь. Дослідження функцій на неперервність.

Мета: закріпити теоретичні знання з теми «Границя функції та неперервність», набути навички і вміння по обчисленню границь послідовностей і функцій Навчити студентів досліджувати функції на неперервність, визначати вид точок розриву функції, схематично будувати графіки функцій

Питання для самопідготовки:

- Поняття функції, області визначення функції, числової послідовності, модуля дійсного числа.
- Зростаюча (спадна) послідовність.
- Окіл точки x_0, поняття границі функції, односторонні границі.
- Геометричний зміст границі функції.
- Нескінченно великі, нескінченно малі функції.
- Основні теореми про границі функцій.
- Перша та друга важливі границі.
- Поняття неперервності функції в точці, на проміжку, точки розриву.

План практичного заняття

1. Розв'язування вправ на функції. Обчислення границь послідовностей.
2. Обчислення границь дробово-раціональних функцій в точці і на нескінченності.
3. Обчислення границь функцій, що містять корені.
4. Розв'язання вправ на використання першої та другої визначних границь.
5. Дослідження функції на неперервність. Знаходження точок розриву функції, та визначення їх виду.

Термінологічний словник ключових понять

Функція — це така відповідність між множинами *D* та *E,* при якій кожному значенню змінної $x \in D$ відповідає одне й тільки одне значення $y \in E$.

Область визначення функції — це множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції.

Послідовність — це числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множина натурального ряду чисел.

Границя а послідовності x_n — це таке число *a,* для якого при довільному $\varepsilon > 0,$ яким би малим воно не було, існує номер *N*, такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Нескінченно мала величина — це така послідовність α_n, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$

Нескінченно велика величина — це така послідовність x_n, для якої при довільному числі *M* $0 < M < +\infty,$ яким би великим воно не було, існує номер *N* такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M.$

Границя функції — а) Число *b* називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке що при $|x - a| < \delta$ і $x \neq a$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$ (означення границі функції «мовою $\varepsilon - \delta$»).

б) Число *b* називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу x_n, $x_n \neq a$, що має границею число *a*, відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ має границею число *b* (означення границі функції «мовою послідовностей»).

Односторонні границі функції — а) Якщо при $x \to a (x < a)$ функція має границю, то ця границя називається *лівосторонньою границею функції в точці* $x = a$.

б) Якщо при $x \to a$ $(x > a)$ функція має границю, то ця границя називається *правосторонньою границею* функції в точці $x = a.$

Лівостороння та правостороння границі функції в точці є односторонніми границями цієї функції.

Перша особлива границя — $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Друга особлива границя — $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Функція неперервна в точці, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. Функція є *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Точка розриву функції — це точка $x = x_0$, в якій порушується хоча б одна з умов рівності $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x)$.

Точка розриву 1-го роду — а) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив неусувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі (зліва і справа) функції у цій точці існують, але не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

б) *Точка $x = x_0$ називається точкою розриву 1-го роду* (розрив усувний) для функції $y = f(x)$, якщо односторонні границі функції у цій точці існують, рівні між собою, але не дорівнюють значенню функції у цій точці, або функція у цій точці не існує, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0).$$

Точка розриву 2-го роду — точка $x = x_0$ називається точкою розриву 2-го роду для функції $y = f(x)$, якщо в цій точці не існує хоча б одна з односторонніх границь (зліва чи справа).

Завдання для практичного виконання:

Приклад 1. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$.

Розв'язання.

Функція визначена, якщо $x-1 \neq 0$ та $1 + x > 0$. Таким чином, областю визначення функції є: $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Приклад 2. Знайти область визначення функцій

$$1)\ y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2};$$

$$2)\ y = \frac{\ln(x+2)}{x^2 - 4x + 4}.$$

Розв'язання.

Приклад 3. Визначити, яка із заданих функцій парна чи непарна:

а) $y = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x$; б) $y = 2^x + 2^{-x}$; в) $y = x^2 + 5x$.

Розв'язання.

а) Оскільки $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = (x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x) = -f(x)$, то функція непарна.

Приклад 4 . Довести, що границею послідовності $x_n = \dfrac{2n+3}{n+5}$ є число a = 2.

Розв'язання.

Задамо число $\varepsilon > 0$, тоді

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| = \left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| = \left|\frac{-7}{n+5}\right| = \frac{7}{n+5}.$$

З нерівності $|x_n - a| < \varepsilon$ маємо $\dfrac{7}{n+5} < \varepsilon$ або $n > \dfrac{7}{\varepsilon} - 5$. Звідки $N = \left[\dfrac{7}{\varepsilon} - 5\right]$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2 - 5n + 6}{6 - 2n + 7n^2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-5n+6}{6-2n+7n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{6}{n^2}-\frac{2}{n}+7\right)}=\infty .$$

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=1.$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+17}$

Розв'язання.

Виконавши перетворення і використавши формулу $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+17}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-8}{2n+1}\right)^{3n+17}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{2n+1}{-8}\cdot\left(\frac{-8}{2n+1}\right)\cdot(3n+17)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{2n+1}{-8}}\right)^{\frac{-8}{2n+1}\cdot(3n+17)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8}{2n+1}\cdot(3n+17)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-24n-136}{2n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-24-\frac{136}{n}}{2+\frac{1}{n}}}=e^{-\frac{24}{2}}=e^{-12}$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-8}{3n+2}\right)^{2n+5}$

Розв'язання.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

За теоремою про границю частки дістанемо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-14x+13)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-17x+15)}=\frac{2^2-14\cdot 2+13}{2\cdot 2^2-17\cdot 2+15}=\frac{4-28+13}{8-34+15}=\frac{-11}{-11}=1.$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+3}{2x^2-5x+1}$

Розв'язання.

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x\to 3$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x}$ при $x\neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=2.$ Звідси $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=2.$

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Розв'язання.

Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад 14. Знайти

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розв'язання.

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Помножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}$

Розв'язання.

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Розв'язання.

Покладемо $1+x=y^5$, тоді

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Розв'язання.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь *x*, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 19. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$

Розв'язання.

Приклад 20. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=[\infty-\infty]$.

Розв'язання.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2+8x+3}+\ +\sqrt{x^2+4x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2.$$

Приклад 21. Знайти $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}$.

Розв'язання.

Якщо $x\to 3-0,$ то $\frac{1}{x-3}\to-\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to 0; \lim\limits_{x\to 3-0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=\frac{1}{3}$.

Якщо $x\to 3+0,$ то $\frac{1}{x-3}\to+\infty, 2^{\frac{1}{x-3}}\to+\infty; \lim\limits_{x\to 3+0}\left(x+2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}=0$.

Приклад 22. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.

Приклад 23. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\sin x/2}{(\pi-x)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання.

Для того щоб скористатися першою особливою границею, потрібно виконати таку заміну змінної x, щоб нова змінна прямувала до нуля, наприклад $\pi - x = y$.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(\pi-x)^2}=\left|\begin{array}{l}\pi-x=y\\ x=\pi-y\\ x\to\pi\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}{16\left(\frac{y}{4}\right)^2}=\frac{1}{8}.$$

Приклад 24. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\,4x\cdot tg\,7x$

Розв'язання.

Для обчислення границі цієї функції використаємо дві з основних формул тригонометрії $ctgx=\frac{\cos x}{\sin x}$ і $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$, а також першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ Маємо

$$\lim_{x\to 0} ctg\,4x\cdot tg\,7x=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\sin 4x}\cdot\frac{\sin 7x}{\cos 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x}{\cos 7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 4x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7x}{4x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7}{4}=\frac{1}{1}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{4}.$$

Приклад 25. $\lim\limits_{x\to 0} tg3x\cdot\sin 5x$

Розв'язання.

Приклад 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{2x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{e^{3\cdot 2}\cdot 1}{e^{-2\cdot 2}\cdot 1}=e^{10}.$$

Приклад 27. Дослідити на неперервність функцію $y=\sin x$.

Розв'язання.

Область визначення функції $y=\sin x - D=R$.

Візьмемо довільне $x_0\in D=R,$ надамо x_0 приросту $\Delta x,$ тоді приріст функції Δy буде

$$\Delta y= f\left(x_0+\Delta x\right)- f\left(x_0\right)=\sin\left(x_0+\Delta x\right)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Розглянемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=0.$$

Звідси функція $y=\sin x$ неперервна $\forall x_0\in R,$ тобто на всій області визначення.

Приклад 28. Показати, що при $x = 4$ функція $y=\dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

Розв'язання.

Знаходимо $\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty, \lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty.$

Таким чином, функція при $x\to 4$ не має ні правої, ні лівої скінченної границі. Звідси, $x = 4$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 29. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

Розв'язання.

У точці $x = 5$ функція має невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. В інших точках дріб скорочується на $x - 5$, оскільки $x-5\neq 0$. Звідси, при $x\neq 5$ $y=x+5$. Легко показати, що

$$\lim_{x\to 5-0} y = \lim_{x\to 5+0} y = 10.$$

Таким чином, при $x = 5$ функція має усувний розрив. Його можна усунути, якщо домовитися, що при $x = 5$ $y = 10$.

Звідси можна вважати, що функція $y=\frac{x^2-25}{x-5}$ неперервна при всіх значеннях x, якщо вважати, що рівність $\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$ справджується при всіх значеннях x, включаючи і саму точку $x = 5$. У цьому випадку графіком функції буде пряма лінія $y=x+5$.

Приклад 30. Дослідіть функцію $y=\frac{x^2}{x+3}$ на неперервність на всій числовій прямій.

Розв'язання.

Домашня самостійна робота.

Завдання 1. Знайти область визначення функцій:

1) $y=\log_2\left(\sqrt{x}-5\right)$;

2) $y = \log_{11}\left(-x^2 + 5x\right) + \frac{1}{\arccos(x-1)}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x-5}} + \arcsin(5x-1)$.

Розв'язання.

Завдання 2. Побудувати графіки функцій:

а) y = sin x + 2; б) y = –2 x^2, в) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, г) $y = \frac{1}{3}|x-1|$.

Розв'язання.

Завдання 3. Знайти границі функцій згідно свого варіанту

(№ варіанту –порядковий номер по журналу):

1. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{4x^2 - 25x + 25}{2x^2 - 15x + 25}$ при: а) $x_0 = 2$, б) $x_0 = 5$, в) $x_0 = \infty$;

   2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$;3) $\lim\limits_{x \to 0} \sin 6x ctg 2x$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n-4}{n+5} \right)^{5n+3}$.

2. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}$ при: а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = -4$, в) $x_0 = \infty$;

   2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg 7x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n-5}{2n+3} \right)^{4n-5}$.

3. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + 15x + 25}{x^2 + 15x + 50}$ при: а) $x_0 = 5$, б) $x_0 = -5$, в) $x_0 = \infty$;

   2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg 5x}{tg 4x}$; 4) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+6} \right)^{2n+3}$.

4. 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$ при: а) $x_0 = -2$, б) $x_0 = 1$, в) $x_0 = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{n+4}$.

5. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при: а) x_0 = -2, б) x_0 = -1, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x-7}{4x^2+x-3}$ при: а) x_0 =2, б) x_0 =-1, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 7x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-6}\right)^{3n-3}$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-8x-20}{2x^2+3x-2}$ при: а) x_0 = -1, б) x_0 = -2, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{18-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-8}{2n+7}\right)^{7n+12}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-10x-6}{x^2-10x+21}$ при: а) x_0 = -2, б) x_0 =3, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{21-x}}{x-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+10}\right)^{3n-8}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+20x+17}{x^2-14x-15}$ при: а) x_0 = -3, б) x_0 = -1, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{16-x}-\sqrt{8+x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 17x}{18x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-17}\right)^{3n-7}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$ при: а) x_0 =2, б) x_0 =1, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} ctg 4x\, tg 7x$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+17}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-20}{3x^2+10x-8}$ при: а) x_0 =4, б) x_0 = -4, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+6}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} ctg 6x \sin 2x$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n-9}\right)^{2n+11}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{8x^2-12x-56}{3x^2+10x+8}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{16-x}-\sqrt{10+x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{arctg5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+17}\right)^{3n-8}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+3x-27}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x+2}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg17x}{tg19x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-9}{4n+10}\right)^{8n-17}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-12x+8}{3x^2+7x-26}$ при: а) $x_0=3$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{7-x}-\sqrt{13+x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{tg9x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n-8}\right)^{3n-12}$.

15. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-20x-21}{2x^2+12x+10}$ при: а) $x_0=1$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{9-x}-\sqrt{5+x}}{x-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\arcsin 7x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n-7}\right)^{6n+14}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{arctg4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ при: а) $x_0=0$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{2n-7}$.

18. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ при: а) $x_0=4$, б) $x_0=-3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{5-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg5x}{ctg3x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n-4}\right)^{3n+2}$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$ при: а) $x_0=-3$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\arcsin 2x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+6}\right)^{n-3}$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=4$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} tg2x ctg3x$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5}$.

21. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$ при: а) $x_0=3$, б) $x_0=5$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x ctg6x$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n+5}\right)^{2n+3}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ при: а) $x_0=-1$, б) $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg7x}{6x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-5}{2n+3}\right)^{2n-5}$.

23. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$ при: а) $x_0=3$, б) $x_0=-5$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+6}\right)^{n+3}$.

24. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg2x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{2n+4}$.

25. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$ при: а) $x_0=2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{4x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{4n-3}\right)^{5n-1}$.

26. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-4x-7}{4x^2+x-3}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg7x}{3x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-6}\right)^{4n-3}$.

27. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-8x-20}{2x^2+3x-2}$ при: а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{18-x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-8}{2n+7}\right)^{5n+12}$.

28. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-10x-6}{x^2-10x+21}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{21-x}}{x-7}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-4}{2n+10}\right)^{3n-8}$.

29. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2+20x+17}{x^2-14x-15}$ при: а) $x_0=3$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{16-x}-\sqrt{8+x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{8x}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+8}{4n-17}\right)^{2n-7}$.

30. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-14x+13}{2x^2-17x+15}$ при: а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+15}-\sqrt{9-x}}{x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} ctg 3x tg 5x$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-7}{2n+1}\right)^{3n+7}$.

Розв'язання.

Список використаної
та рекомендованої літератури

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів, Т.1.-К.:НАУ,2002.
2. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Львів:“Новий світ–2000”,2004.
3. Бугір, М. К. Математика для економістів: посібник / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
4. Долгіх, В. М. Вища математика для економістів. Ч. 1. Алгебра та математичний аналіз: навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни : у 2 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна ; Державний вищий навчальний заклад “Українська академія банківської справи Національного банку України”. – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2009. – 97 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.:А.С.К., 2001.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Збірник задач з вищої математики. – К.:А.С.К., 2001.
7. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. .-К.:ЦУЛ, 2003 – 536 с.
8. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика. Довідник для студентів вищих навч.закладів: Навч. посібник. 2-е вид., виправлене і доповн. -К.: Діал.,2003.
9. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр “Академія”, 2002.
10. Валєєв К. Г., Джалладова І. А., Лютий О. І. та ін. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. /— Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
11. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 1. — 546 с.