Вступ

Як правило, різні операції в математиці мають обернені. Так, наприклад, оберненою до операції додавання є операція віднімання. Взаємно оберненими є операції множення та ділення, піднесення до степеня та добування квадратного кореня тощо. Для операції знаходження похідної (диференціювання) також існує обернена операція — інтегрування. Диференціальне та інтегральне числення становлять основу математичного аналізу. Інтегральне числення є значно складнішим, ніж диференціальне. Існують різні методи інтегрування. Далі розглядаються основні поняття інтегрального числення та найважливіші методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, інтегрування частинами та заміна змінної. На них базуються більш складні методи. Вміння підібрати метод для знаходження того чи іншого інтеграла формується лише практикою розв'язування вправ. Часто при знаходженні інтегралів треба використовувати творчі підходи.

Теоретичні відомості

Операція диференціювання функції, тобто знаходження її похідної, має обернену, яка називається інтегруванням. Поняттю інтеграла передує поняття первісної.

Означання 1. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), якщо для всіх точок з цього інтервалу має місце рівність

$$F'(x)=f(x),\ \ x\in(a, b).$$

Тобто, описово кажучи, первісною заданої функції називається така функція, похідна якої співпадає із заданою функцією. Правильність знаходження первісної можна перевірити за допомогою диференціювання.

Приклад 1. Первісною для функції $f(x)=\cos x$ є функція $F(x)=\sin x$. Справді, $F'(x)=\sin' x=\cos x=f(x)$.

Приклад 2. Первісною для функції $f(x)=x^3$ є функція $F(x)=\dfrac{x^4}{4}$. Перевіримо це, диференціюючи:

$$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{4x^3}{4}=x^3=f(x).$$

Приклад 3. Первісною для функції $f(x)=e^{2x}$ є функція $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

Справді,

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot(2x)'=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x).$$

В усіх трьох прикладах первісна існує на всій числовій прямій $(-\infty;+\infty)$. Взагалі, при знаходженні первісної часто не вказують проміжок, на якому вона знаходиться, спеціально. Вважається, що первісна знайдена на проміжку (або об'єднанні проміжків), який є "максимально можливим".

Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) і C – довільне число. Оскільки

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x),$$

тобто похідна функції $F(x)+C$ співпадає з функцією $f(x)$, то це означає, що функція $F(x)+C$ також є первісною для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b). Таким чином, якщо функція має первісну, то така первісна не єдина, а їх безліч: додаванням до знайденої первісної будь-якого числа можна отримувати щоразу нову первісну. Приміром, для функції $f(x)=\cos x$ первісною є не лише функція $F(x)=\sin x$, а й функції

$$F_1(x)=\sin x+4,\quad F_2(x)=\sin x-\frac{1}{2},\quad F_3(x)=\sin x-\sqrt{3},$$

і взагалі, будь-яка функція виду $\sin x+C$, де C – довільне число.

Виявляється, що первісних іншого виду, крім $F(x)+C$, функція мати не може. Справедлива наступна

Теорема 1. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на деякому інтервалі, то будь-яка інша первісна $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на цьому інтервалі має вигляд

$$\Phi(x)=F(x)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Таким чином, знаходження первісної розв’язується не однозначно: якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то таких первісних безліч і всі вони містяться серед функцій виду $F(x)+C$, де C – довільне дійсне число.

Означення 1. ***Невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на інтервалі називається множина всіх первісних цієї функції на заданому інтервалі.

Таким чином, за означенням

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C\,,\quad C\in\mathbb{R}\,,$$

де функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

Операція знаходження невизначеного інтеграла називається ***інтегруванням.*** У виразі $\int f(x)\,dx$ функція $f(x)$ називається ***підінтегральною функцією,*** змінна x називається ***змінною інтегрування,*** а величина C називається ***сталою*** (або ***константою***) ***інтегрування.***

Знаючи одну з первісних функції можна, таким чином, знайти невизначений інтеграл від заданої функції, тобто проінтегрувати її. Так, з прикладів 1 — 3 випливають наступні рівності:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C\,,\ \ \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C\,,\ \ \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C\,.$$

Як і при знаходженні похідних, для інтегрування потрібно мати формули, за якими можна знаходити інтеграли від основних елементарних функцій. Частину цих формул можна отримати з таблиці похідних, застосовуючи її в “зворотному порядку”. Наприклад, за таблицею похідних маємо

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

тому звідси отримуємо формулу інтегрування $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. Решту формул в таблиці інтегралів знаходять іншими методами. Результат може бути перевіреним безпосереднім диференціюванням. Зауважимо також, що в літературі часто подаються різні таблиці інтегралів: до них включають різні функції, наприклад, т.з. гіперболічні функції.

Таблиця інтегралів від основних елементарних функцій

$$1)\ \int dx = x + C \quad 2)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \in \mathbb{R},\ n \neq -1 \quad 3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \quad 5)\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad 6)\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$7)\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad 8)\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad 9)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10)\ \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0,\ a \neq 1 \quad 11)\ \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$12)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad 13)\ \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$14)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad 15)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

У формулах 12) — 15) через a позначено довільне додатне число.

Невизначений інтеграл має ряд властивостей, деякі з яких наведено в наступній теоремі.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають первісні на деякому інтервалі, то на цьому інтервалі виконуються рівності:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx;$$

$$\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx;$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ a \neq 0,\ F'(x) = f(x).$$

Перша з цих рівностей, описово кажучи, означає, що інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів, а друга — що сталий множник можна виносити за знак інтеграла. В третій рівності дається правило інтегрування складеної функції, якщо внутрішня функція є лінійною і первісна для підінтегральної функції відома.

Звернемо увагу на таку особливість. В диференціальному численні відомі формули для знаходження похідної від добутку та частки двох функцій:

$$(uv)' = u'v + uv', \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

В інтегральному ж численні не існує загальних формул, за якими можна було би проінтегрувати добуток або частку двох функцій. Це не означає, що добуток або частку двох функцій неможливо проінтегрувати. В частинних випадках це зробити можна. Проте універсальних формул для інтегралів виду

$$\int u(x)v(x)\,dx, \int \frac{u(x)}{v(x)}\,dx$$

не існує. При інтегруванні добутку та частки функцій доводиться використовувати різні прийоми. Це зауваження показує, що операція інтегрування є значно складнішою, ніж диференціювання.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод базується на використанні табличних інтегралів та найпростіших властивостей інтеграла. В деяких випадках інтеграли, які не є табличними, вдається звести до табличних шляхом попередніх перетворень підінтегральної функції. Розглянемо приклади.

Приклад 4. $\int \left(10x^4 + 3e^x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 5\right)dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є сумою чотирьох доданків. Сталі множники в кожному з них при інтегруванні залишаються без змін. Інтеграли від кожної з цих функцій є табличними. За формулами 2), 11), 12) та 1) з таблиці інтегралів знаходимо:

$$\int \left(10x^4 + 3e^x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + 5\right)dx = \frac{10x^5}{5} + 3e^x - 2\arcsin x + 5x + C =$$

$$= 2x^5 + 3e^x - 2\arcsin x + 5x + C.$$

Відповідь: $2x^5 + 3e^x - 2\arcsin x + 5x + C$.

Приклад 5. $\int \left(\frac{9}{x^4} + 14\sqrt[4]{x^3} \right) dx$.

Розв'язання. Для того, щоб підінтегральну функцію привести до табличного виду, потрібно скористатися формулами для степеня з від'ємним та дробовим показником:

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad \sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$$

Після цього інтегруються дві степеневі функції:

$$\int \left(\frac{9}{x^4} + 14\sqrt[4]{x^3} \right) dx = \int \left(9x^{-4} + 14x^{3/4} \right) dx = \frac{9x^{-3}}{-2} + \frac{14x^{7/4}}{7/4} + C =$$

$$= -\frac{9}{3x^3} + 14 \cdot \frac{4}{7} x^{7/4} + C = -\frac{3}{x^3} + 8\sqrt[4]{x^7} + C = -\frac{3}{x^3} + 8x\sqrt[4]{x^3} + C.$$

Відповідь: $-\frac{3}{x^3} + 8x\sqrt[4]{x^3} + C$.

Приклад 6. $\int x(x+1)^2 dx$.

Розв'язання. Для перетворення інтеграла до табличного виду достатньо розкрити дужки та проінтегрувати суму функцій, що при цьому буде отримана:

$$\int x(x+1)^2 dx = \int x(x^2 + 2x + 1) dx = \int (x^3 + 2x^2 + x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Відповідь: $\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

Приклад 7. $\int \frac{20x^5 + 3}{x} dx$.

Розв'язання. Для того, щоб проінтегрувати цей дріб, розкладемо його на суму двох дробів з однаковим знаменником. Потім користуємося формулами 2) та 5):

$$\int \frac{20x^5 + 3}{x} dx = \int \left(\frac{20x^5}{x} + \frac{3}{x} \right) dx = \int \left(20x^4 + \frac{3}{x} \right) dx = \frac{20x^5}{5} + 3\ln|x| + C =$$

$=4x^5+3\ln|x|+C$.

Відповідь: $4x^5+3\ln|x|+C$.

Приклад 8. $\int \sin 8x \cos 3x\, dx$.

Розв'язання. Як і в прикладі 3, тут інтеграл береться від добутку. Загальної ж формули для інтегрування добутків не існує. Прийом, яким користуються для знаходження інтегралів такого виду, полягає в перетворенні добутку тригонометричних функцій на суму. В цьому прикладі скористаємося такою формулою:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

В такий спосіб даний інтеграл зводиться до інтеграла від суми двох синусів. Маємо:

$$\int \sin 8x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin(8x+3x)+\sin(8x-3x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin 11x+\sin 5x\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{11}\cos 11x-\frac{1}{5}\cos 5x\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{22}\cos 11x-\frac{1}{10}\cos 5x+C.$$

Варто звернути увагу на такий важливий нюанс. Інтеграл від $\sin 11x$ дорівнює не $-\cos 11x$, а $-\frac{1}{11}\cos 11x$. Коефіцієнт 11 ще з'являється перед первісною в оберненому вигляді, тобто $\frac{1}{11}$ (третя рівність в теоремі 2). Тобто

$$\int \sin 11x\,dx=-\frac{1}{11}\cos 11x+C.$$

Перевіримо, диференціюючи:

$$\left(-\frac{1}{11}\cos 11x+C\right)'=-\frac{1}{11}(-\sin 11x)\cdot(11x)'=\frac{1}{11}\cdot 11\sin 11x=\sin 11x.$$

Про такі коефіцієнти при інтегруванні непотрібно забувати.

Відповідь: $-\frac{1}{22}\cos 11x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$.

Приклад 9. $\int \cos^2 4x\, dx$.

Розв'язання. Щоб взяти такий інтеграл, треба понизити степінь косинуса. Формули пониження степеня є наступними:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Таким чином, інтеграл легко зводиться до табличних:

$$\int \cos^2 4x\, dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C$.

Приклад 10. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2\, dx$.

Розв'язання. Виконаємо піднесення до квадрату та перетворимо підінтегральну функцію так, щоб вона містила лише функції синус та косинус:

$$\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2\, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x)\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 2 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

Метод інтегрування частинами

Цей метод базується на наступній теоремі.

Теорема 3. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні на деякому інтервалі, то на цьому інтервалі має місце формула:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx\,.$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами.* Враховуючи, що для диференціала функції $f(x)$ має місце формула $df(x) = f'(x)\,dx$, можна записати формулу інтегрування частинами в наступній символічній формі:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Саме така форма є зручною при знаходженні інтегралів. Використовуючи метод інтегрування частинами, інтеграл розглядають таким, що має вигляд $\int u\,dv$. Одну з функцій під знаком інтеграла розглядають як u, а вираз, що при цьому залишається, позначають dv. Існує декілька типових ситуацій, коли зручно використовувати метод інтегрування частинами.

1) Інтеграли виду

$$\int P(x)\,e^{\alpha x}\,dx\,,\ \int P(x)\cos\alpha x\,dx\,,\ \int P(x)\sin\alpha x\,dx\,,\ \alpha \neq 0\,,$$

в яких $P(x)$ є алгебраїчним многочленом. В таких інтегралах за функцію u приймають алгебраїчний многочлен, тобто $u = P(x)$. Тоді в першому з інтегралів залишається вираз $e^{\alpha x}\,dx$, який і приймається за dv, тобто $dv = e^{\alpha x}\,dx$. Для другого та третього інтегралів $dv = \cos\alpha x\,dx$ та $dv = \sin\alpha x\,dx$ відповідно.

Приклад 11. $\int (2x+1)\cos x\,dx$.

Розв'язання. Приймаємо $u = 2x+1$. В підінтегральному виразі залишився вираз $\cos x\,dx$. Саме він приймається за dv. Отже, $dv = \cos x\,dx$. У формулі інтегрування частинами

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

інтеграл $\int u\,dv$ виражається через $\int v\,du$. Тому для використання цієї формули потрібно за відомими u та dv знайти du та v. Вираз du є диференціалом функції u. Оскільки $u = 2x+1$, то диференціюючи, знаходимо:

$$du = (2x+1)'\,dx = 2\,dx\,.$$

Отже, $du = 2\,dx$. Функцію v за її диференціалом dv знаходять інтегруванням. Оскільки $dv = \cos x\,dx$, то $v = \int \cos x\,dx = \sin x$, тобто $v = \sin x$. Таким чином, за формулою інтегрування частинами знаходимо:

$$\int (2x+1)e^{\alpha x}\,dx = \begin{vmatrix} u = 2x+1 & dv = \cos x\,dx \\ du = 2\,dx & v = \sin x \end{vmatrix} = (2x+1)\sin x - \int 2\sin x\,dx =$$

$$= (2x+1)\sin x + 2\cos x + C.$$

Відповідь: $(2x+1)\sin x + 2\cos x + C$.

Приклад 12. $\int x^2 e^{4x}\,dx$.

Розв'язання. В даному випадку інтегрування частинами проводиться двічі:

$$\int x^2 e^{4x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = (x^2)'\,dx = 2x\,dx \\ dv = e^{4x}\,dx & v = \int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\cdot 2x\,dx - \frac{1}{2}\int x e^{4x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & du = x'\,dx = dx \\ dv = e^{4x}\,dx & v = \int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\,dx\right) = = \frac{1}{4}x^2 e^{4x} - \frac{1}{8}x e^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C =$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}e^{4x}\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) + C$.

2) Інтеграли виду

$$\int P(x)f(x)\,dx,$$

де $P(x)$ – алгебраїчний многочлен, $f(x)$ – або логарифмічна функція, або одна з обернених тригонометричних функцій. Для таких інтегралів приймають

$$u = f(x), \quad dv = P(x)\,dx.$$

Приклад 13. $\int \ln x\, dx$.

Розв'язання. На відміну від таблиці похідних, інтеграл від логарифма не є табличним. Причина полягає в тому, що одразу з таблиці похідних неможливо визначити, яка функція є первісною для логарифма. Цей інтеграл береться частинами.

$$\int \ln x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \ln' x\, dx = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int x \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Відповідь: $x\ln x - x + C$.

Приклад 14. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами:

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \operatorname{arctg}' x\, dx = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = x\, dx & v = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\, dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}(x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C$.

3) Інтеграли виду

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx, \ \int e^{\alpha x}\sin\beta x\, dx, \ \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0.$$

При знаходженні таких інтегралів формула інтегрування застосовується двічі, при цьому через u зручно позначати тригонометричну функцію. В результаті такого подвійного застосування формули одержується рівняння, лінійне відносно невідомого інтеграла.

Приклад 15. $\int e^{2x}\cos 4x\,dx$.

Розв'язання. Інтегруємо частинами двічі:

$$\int e^{2x}\cos 4x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\cos 4x & du=\cos' 4x\,dx=-4\sin 4x\,dx \\ dv=e^{2x}\,dx & v=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x-\int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(-4)\sin 4x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+2\int e^{2x}\sin 4x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\sin 4x & du=\sin' 4x\,dx=4\cos 4x\,dx \\ dv=e^{2x}\,dx & v=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+$$

$$+2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 4x-\int \frac{1}{2}e^{2x}4\cos 4x\,dx\right)=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4\int e^{2x}\cos 4x\,dx$$

Введемо позначення для шуканого інтеграла: $I=\int e^{2x}\cos 4x\,dx$. Тоді, прирівнявши початковий інтеграл з виразом, що отриманий в кінці викладок, матимемо лінійне рівняння відносно I:

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 4x+e^{2x}\sin 4x-4I\,.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$5I=e^{2x}\left(\frac{1}{2}\cos 4x+\sin 4x\right),\quad I=\frac{1}{5}e^{2x}\left(\frac{1}{2}\cos 4x+\sin 4x\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{5}e^{2x}\left(\frac{1}{2}\cos 4x+\sin 4x\right)+C$.

Метод заміни змінної (метод підстановки)

Цей метод базується на наступній теоремі.

Теорема 4. Нехай функція $t=\varphi(x)$ має похідну на на інтервалі $(a\,,b)$ і нехай областю значень цієї функції є інтервал $(c\,,d)$. Нехай також функція $f(t)$ має первісну на інтервалі $(c\,,d)$:

$$\int f(t)\,dt=F(t)+C\,,\ \ t\in(c\,,d)\,.$$

Тоді має місце формула

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C\,,\ \ x\in(a\,,b)\,.$$

Розглянемо приклади.

Приклад 16. $\int \sin^5 x\cos x\,dx\,.$

Розв'язання. При застосуванні методу підстановки функцію $t=\varphi(x)$ потрібно обирати так, щоб підінтегральна функція мала вигляд $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ і при цьому інтеграл $\int f(t)\,dt$ було легко взяти. В прикладі, який зараз розглядається, є дві тригонометричні функції. При цьому $\sin' x=\cos x$. Тому даний інтеграл зводиться до табличного за допомогою заміни $t=\sin x$:

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\sin' x\,dx=\cos x\,dx \end{array}\right|=\int t^5\,dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C\,.$$

Звернемо увагу на те, що після знаходження інтеграла за новою змінною t потрібно повернутися до старої змінної x.

Відповідь: $\dfrac{\sin^6 x}{6}+C\,.$

Приклад 17. $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

Розв'язання. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\ln x \\ dt=\ln' x\,dx=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right|=\int \sqrt{t}\,dx=\int t^{1/2}\,dt=$

$$=\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C\,.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$.

Приклад 18. $\int\frac{x\,dx}{x^2-4}$.

Розв'язання. $$\int\frac{x\,dx}{x^2-4}=\left|\begin{array}{c}t=x^2-1\\ dt=(x^2-4)'\,dx=2\,x\,dx\\ x\,dx=\frac{1}{2}\,dt\end{array}\right|=\int\frac{1/2\,dt}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C$.

В деяких випадках буває зручніше виконувати заміну не у вигляді $t=\varphi(x)$, а навпаки, виражати стару змінну через нову $x=g(t)$ і знаходити диференціал цієї функції $dx=g'(t)\,dt$. Після цього вирази $g(t)$ та $g'(t)dt$ підставляти під знак інтеграла.

Приклад 19. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

Розв'язання. Через нову змінну позначимо знаменник дробу: $t=\sqrt{x}+2$ і звідси виразимо змінну x:

$$\sqrt{x}=t-2,\ \ x=(t-2)^2,\ \ x=t^2-4\,t+4.$$

Диференціюючи, знаходимо: $dx=(t^2-4\,t+4)'\,dt=(2\,t-4)\,dt$. Виконуємо підстановку:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}=\left|\begin{array}{c}t=\sqrt{x}+2,\ x=t^2-4\,t+4\\ dx=(2\,t-4)\,dt\end{array}\right|=\int\frac{(2\,t-4)\,dt}{t}=2\int\frac{t-2}{t}\,dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt=2(t-\ln|t|)+C=2\,t-4\ln|t|+C=2(\sqrt{x}+2)-4\ln(\sqrt{x}+2)+C.$$

Відповідь: $2(\sqrt{x}+2)-4\ln(\sqrt{x}+2)+C$.

Контрольні питання

1. Що називається первісною?
2. Як можна перевірити, чи правильно була знайдена первісна?
3. Як знайти всі первісні функції, знаючи одну з них?
4. Що називається невизначеним інтегралом від функції?
5. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
6. В чому полягає метод безпосереднього інтегрування? Поясніть, в яких випадках він застосовується.
7. Формула інтегрування частинами. В яких випадках нею зручно користуватися?
8. Поясніть, як виконується заміна змінної в невизначеному інтегралі.

Завдання для самостійного розв'язання

I. *Знайдіть інтеграли методом безпосереднього інтегрування:*

1) $\int (16x^3 - 2e^x + 3\cos x - 5)\,dx$ 2) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{6}{x^5}\right)dx$ 3) $\int \left(\frac{6}{x^2+100} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

4) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 10x^4\right)dx$ 5) $\int \left(\frac{10}{x^2-81} + \frac{7}{\cos^2 x}\right)dx$ 6) $\int (4x-1)^{99}\,dx$

7) $\int \left(2\cos 3x - \frac{5}{\sin^2 6x}\right)dx$ 8) $\int \left(e^{6x} + \frac{2}{\sqrt{6x-1}}\right)dx$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$

10) $\int \frac{dx}{64x^2+1}$ 11) $\int \left(\frac{3}{(27x-1)^2} + 2^{5x+1}\right)dx$ 12) $\int \left(\frac{9}{(3x-2)^7} - 2\sqrt[4]{6x+5}\right)dx$

13) $\int (2x-1)(4x^2+2x+1)\,dx$ 14) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ 15) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

16) $\int e^x(e^x-1)^2\,dx$ 17) $\int \cos^2 6x\,dx$ 18) $\int \cos 18x \cos 10x\,dx$

19) $\int \sin 12x \sin 5x\,dx$ 20) $\int \sin 7x \cos 4x\,dx$ 21) $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$

22) $\int (2^x + 5^x)^2\,dx$ 23) $\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx$ 24) $\int \frac{x^2}{x-4}\,dx$ 25) $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$

II. *Знайдіть інтеграли, користуючись методом інтегрування частинами:*

1) $\int (9x-2)e^x\,dx$ 2) $\int (6x+1)\cos 4x\,dx$ 3) $\int (5x-1)\sin 2x\,dx$ 4) $\int x^2 e^{2x}\,dx$

5) $\int x^2\cos x\,dx$ 6) $\int (3x^2-1)e^{3x}\,dx$ 7) $\int x^3\sin x\,dx$ 8) $\int xe^{-x}\,dx$

9) $\int x^4\ln x\,dx$ 10) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ 11) $\int e^{-x}\sin 4x\,dx$ 12) $\int x^2(e^x+e^{-x})\,dx$

III. *Знайдіть інтеграли, користуючись методом заміни змінної:*

1) $\int \cos^{10}x\sin x\,dx$ 2) $\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-4}$ 3) $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$ 4) $\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{\cos^2 x}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln^8 x}$ 6) $\int \frac{\sqrt[9]{\ln^2 x}}{x}\,dx$ 7) $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+8}$ 8) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

9) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$ 10) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 11) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ 12) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\cos^2 x}$ 14) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+2}}$ 15) $\int \frac{2^{\operatorname{ctg} x}\,dx}{\sin^2 x}$ 16) $\int \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$

17) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+10}}\,dx$ 18) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ 19) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$ 20) $\int \frac{dx}{(\sin x-\cos x)^2}$

IV. Використовуючи різні прийоми, знайдіть інтеграли:

1) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ 2) $\int \frac{dx}{x^2-4x+20}$ 3) $\int x\cos^2 x\,dx$ 4) $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$

5) $\int \sin(\ln x)\,dx$ 6) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$ 7) $\int \frac{dx}{x^4-1}$ 8) $\int (e^x+\sin x)^2\,dx$

9) $\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+1}$ 10) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$