Петро Попов

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ФАХОВИХ КОЛЕДЖІВ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ
“ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ТА ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ НАЦІОНАЛЬНОГО
АВІАЦІЙНОГО УНІВЕРСИТЕТУ”

Збірник завдань
з вищої математики для фахових коледжів

Для студентів денної форми навчання
нематематичних спеціальностей

Київ 2022

Упорядник:

Попов П.А., к.ф.-м.н, доцент

Рецензент:

Лещинський О.Л., к.ф.-м.н, доцент

Збірник завдань з вищої математики для фахових коледжів / Попов П.А. — К.: ВСП “ФКІТЗ НАУ”, 2022. — 95 с.

Пропонований збірник завдань призначений для використання на практичних заняттях з вищої математики в коледжах. Він також може бути використаний для самостійної роботи студентів. До кожної теми наводяться короткі теоретичні відомості та пропонуються завдання для для авдиторної та домашньої роботи. Задачі у збірнику підібрані з урахуванням особливостей викладання курсу вищої математики у коледжах, що суттєво відрізняється від викладання в університетах.

Затверджено на засіданні циклової комісії
природничих дисциплін
протокол № 1 від 30.08.2022

Рекомендовано до друку методичною радою ВСП “ФКІТЗ НАУ”
протокол № 2 від 08.09.2022

Зміст

Передмова

В основу пропонованого збірника покладено завдання, які напрацьовувалися автором при викладанні курсу вищої математики протягом ряду років студентам різних спеціальностей Відокремленого структурного підрозділу “Фаховий коледж інформаційних технологій та землевпорядкування Національного авіаційного університету”. Поява цієї книги обумовлена двома причинами.

По-перше, наявні збірники задач для коледжів були видані давно (часто в їх назвах ще навіть зазначається: для технікумів), їхній зміст потребує модернізації, написані вони не українською мовою. Матеріал таких задачників може використовуватися викладачами лише після ретельної методичної переробки, але сучасним студентам їх рекомендувати недоцільно.

Друга причина полягає в суттєвій відмінності змісту курсів вищої математики, які викладаються в університетах та фахових коледжах. Ця відмінність проявляється також у підборі задач до курсу та в рівні їхньої складності. Існує великий масив хороших збірників задач, що укладені відповідно до університетських курсів. Але використання їх в практиці викладання в коледжах у вигляді “як є” також проблематичне.

Даний збірник містить задачі з наступних розділів вищої математики: лінійна алгебра (елементи теорій матриць та визначників, методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь), аналітична геометрія (векторне числення, пряма на площині, площина в просторі), математичний аналіз (диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної), елементи теорії ймовірностей. Вказані розділи курсу відображені у робочих програмах ВСП “ФКІТЗ НАУ”. При підготовці збірника не ставилася мета охопити “всю” вищу математику. Це б неминуче призвело до перетворення збірника завдань на наближений до університетського, його переобтяження та ускладнювало б його використання в практичній викладацькій діяльності через обмежену кількість годин, що відводяться на вивчення курсу вищої математики у фахових коледжах. Саме тому в збірнику немає задач, які, можливо, використовуються в деяких коледжах (комплексні числа, основи теорії диференціальних рівнянь, елементи математичної статистики тощо). Тим не менш, хочеться сподіватися, що цей збірник буде корисним в практичній роботі як при очній, так і дистанційній формах навчання.

Автор з приємністю висловлює подяку рецензенту — доценту, кандидату фізико-математичних наук Олегу Львовичу Лещинському, який уважно прочитав рукопис і висловив ряд цінних зауважень та побажань. Їх урахування дало можливість покращити даний збірник змістовно і методично.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

Тема 1. Лінійні операції з матрицями

Теоретичні відомості

Сумою матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ та $B=(b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C=A+B=(c_{ij})_{m\times n}$, елементи якої знаходяться як суми відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ \ i=1,2,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

Добутком матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ***на число*** k називається матриця $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$. Тобто для того, що помножити матрицю на число, потрібно помножити кожен елемент цієї матриці на число.

Різниця матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ та $B=(b_{ij})_{m\times n}$ визначається через суму: $A-B=A+(-1)B$.

Добутком матриць $A=(a_{ij})_{m\times n}$ та $B=(b_{ij})_{m\times k}$ називається матриця $C=AB=(c_{ij})_{m\times k}$, елементи якої визначаються за формулами

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj},\ \ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,k.$$

Ця формула визначає правило множення рядків матриці A на стовпчики матриці B.

Транспонування матриці полягає в заміні місцями рядків та стовпчиків при умові, що їхній порядок зберігається: перший рядок стає першим стовпчиком в транспонованій матриці, другий рядок — другим стовпчиком і т.д. Тобто

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ \ A^T=(a_{ji})_{n\times m}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть матриці $C=A-2B^T$ та $D=4A^T+B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 8 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ -7 & 5\\ 9 & 6\end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть добутки AB та BA для заданих матриць:

$$1.1)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 9 & -5\end{pmatrix};\quad 1.2)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ -2 & 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 7 & -8 & 2\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix};$$

$$1.3)\ A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 7 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\\9\end{pmatrix};\quad 1.4)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\-5 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\\0 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\5 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & -7 & 8\\0 & 0 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Знайдіть значення квадратного тричлена $f(x)=2x^2-5x+4$ для заданих матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\-4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\4 & 0 & 3\\-1 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть матриці $C=2A^T+3B$ та $D=4A-5B^T$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\8 & 7 & 6 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\\-7 & 5\\9 & 6\end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть добутки AB та BA для заданих матриць:

$$1.1)\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & -8\\4 & 3\end{pmatrix};\quad 1.2)\ A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -1 & 4\\1 & -2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\3 & -6 & 1\\2 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$1.3)\ A=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\\2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad 1.4)\ A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 8 & 2\\0 & 0 & 4 & 1\\5 & -2 & 0 & 0\\-1 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & 7 & 3\\4 & 12 & 0 & 0\\-5 & 7 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Знайдіть значення квадратного тричлена $f(x)=3x^2+x-2$ для заданих матриць:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\1 & 2 & -1\\5 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Тема 2. Визначники невеликих порядків

Теоретичні відомості

Визначник (детермінант) матриці — це число, яке ставиться у відповідність кожній квадратній матриці за певним правилом. Визначник матриці A позначають символом $\det A$ або

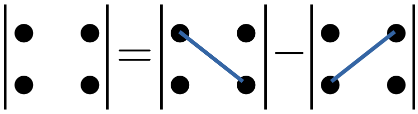
$|A|$. Квадратна матриця першого порядку складається лише з одного числа. Визначником такої матриці називається те число, що міститься в матриці:

$$A=(a), \quad \det A=a\,.$$

Для спрощення говорять не “визначник матриці”, а просто “визначник”. Визначником другого порядку називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}\,.$$

Таким чином, щоб знайти визначник другого порядку, потрібно від добутку елементів його головної діагоналі відняти добуток елементів його побічної діагоналі. Схематично це правило зображається наступним чином:

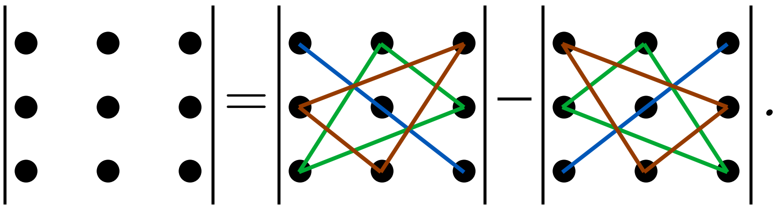


Точки, що з’єднані лініями на цій схемі, відповідають елементам визначника, які треба перемножити.

Визначником третього порядку називається число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{11}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11}\,.$$

Таке означення визначника і спосіб його обчислення ще називається *правилом трикутника*. Схематично воно виглядає наступним чином:



Визначник третього порядку можна також обчислити за *правилом Саррюса*. Для цього потрібно приписати поруч з визначником два його перших стовпчики і скористатися наступною схемою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \quad - \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Мінором елемента a_{ij} визначника називається визначник, який одержується з даного визначника викресленням $i-$го рядка та $j-$го стовпчика (тобто тих рядка та стовпчика, на перетині яких розташований елемент у визначнику). Мінор елемента a_{ij} визначника позначається символом M_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається число, яке визначається формулою

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Іншими словами, алгебраїчне доповнення дорівнює мінору, якщо сума номерів рядка та стовпчика, в яких розташований елемент, є числом парним. Якщо ж сума номерів рядка і стовпчика, в яких розташований елемент, є непарним числом, то алгебраїчне доповнення такого елемента дорівнює його мінору, взятому з протилежним знаком.

Властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється при його транспонуванні:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Визначник змінює знак при перестановці місцями будь-яких двох його рядків.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3. Спільний множник елементів будь-якого рядка можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Визначник дорівнює нулю, якщо виконується принаймні одна умова:

   4.1) визначник містить нульовий рядок;

   4.2) визначник містить два однакові рядки;

   4.3) визначник містить два пропорційні рядки.

5. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка на їхні алгебраїчні доповнення *(властивість розкладу):*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

6. Сума добутків елементів будь-якого рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка визначника дорівнює нулю:

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0.$$

7. Визначник не змінює своє значення, якщо до елементів довільного його рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Перша властивість фактично стверджує рівноправність рядків та стовпчиків у визначнику: якщо якесь твердження справедливе для рядків, то воно ж має місце і для стовпчиків. Тому властивості 2 — 7 сформульовані лише для рядків, хоча вони мають місце і для стовпчиків.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть визначники другого порядку:

$$1.1)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix},\ 1.2)\begin{vmatrix} \operatorname{tg} 42^\circ & 1 \\ -3 & \operatorname{ctg} 42^\circ \end{vmatrix},\ 1.3)\begin{vmatrix} a+2 & -1 \\ 5 & a^2-2a+4 \end{vmatrix},\ 1.4)\begin{vmatrix} 7 & \lg 2 \\ \log_2 10 & 8 \end{vmatrix}.$$

2. Розв’яжіть рівняння:

$$1.1)\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0,\ 1.2)\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 18 & x+4 \end{vmatrix}=0,\ 1.3)\begin{vmatrix} 2^{4x+1} & 8 \\ 16 & 1 \end{vmatrix}=0,\ 1.4)\begin{vmatrix} \sqrt{x+2} & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Розв’яжіть нерівність:

$$1.1)\begin{vmatrix} 9 & 2x+5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}<0,\ 1.2)\begin{vmatrix} x+2 & 11 \\ -1 & x-10 \end{vmatrix}\geqslant 0,\ 1.3)\begin{vmatrix} \log_2(x-4) & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}<0.$$

4. Перший визначник обчисліть за правилом трикутника, другий — за правилом Саррюса, третій та четвертий — шляхом розкладу за елементами того рядка або стовпчика, який містить два нулі:

$$4.1)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix},\ 4.2)\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix},\ 4.3)\begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix},\ 4.4)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть визначники другого порядку:

$$1.1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix},\ \ 1.2)\begin{vmatrix} \sqrt{5} & 7 \\ 6 & \sqrt{125} \end{vmatrix},\ \ 1.3)\begin{vmatrix} 2\sin 75^\circ & 2 \\ 6 & \cos 75^\circ \end{vmatrix},\ \ 1.4)\begin{vmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{vmatrix}.$$

2. Розв’яжіть рівняння:

$$1.1)\begin{vmatrix} 5 & x+4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix}=0,\ \ 1.2)\begin{vmatrix} 3 & x+6 \\ x-2 & 11 \end{vmatrix}=0,\ \ 1.3)\begin{vmatrix} \sin x & \sqrt{2} \\ 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}=0,\ \ 1.4)\begin{vmatrix} \lg^2 x & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Розв’яжіть нерівність:

$$1.1)\begin{vmatrix} 3x-1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\geqslant 0,\ \ 1.2)\begin{vmatrix} \sqrt{2x-5} & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}<0,\ \ 1.3)\begin{vmatrix} 7^{2x-1} & 1 \\ 1 & 7^{-x+3} \end{vmatrix}>0.$$

4. Перший визначник обчисліть за правилом трикутника, другий — за правилом Саррюса, третій та четвертий — шляхом розкладу за елементами того рядка або стовпчика, який містить два нулі:

$$4.1)\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix},\ \ 4.2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 9 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix},\ \ 4.3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix},\ \ 4.4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Тема 3. Визначники вищих порядків. Обернена матриця

Теоретичні відомості

Визначник квадратної матриці четвертого порядку (або коротко, визначник четвертого порядку) визначається за допомогою визначників третього. А саме, мінор елемента — це визначник, який одержується шляхом викреслення рядка та стовпчика, на перетині яких розташований даний елемент. Таким чином, мінорами елементів визначника четвертого порядку є визначники третього порядку. Так само, як і для визначників невеликих порядків, розглядаються алгебраїчні доповнення елементів:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Визначником четвертого порядку називається число, яке дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}.$$

Таким чином, визначник четвертого порядку означається за допомогою розкладу за елементами першого рядка. Можна також довести, що величина визначника не зміниться, якщо його розкладати за будь-яким іншим рядком або стовпчиком. Крім того, визначники четвертого порядку мають такі ж самі властивості, що й визначники другого та третього порядків.

Аналогічно визначник п’ятого порядку — це сума добутків елементів його першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення. При цьому мінорами елементів визначника п’ятого порядку будуть визначники четвертого порядку, і т. д. Взагалі, визначник квадратної матриці порядку n (або, коротко, визначник порядку n) — це число, яке дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

Визначники будь-якого порядку $n \geqslant 4$ мають такі ж властивості, що й визначники другого та третього порядків.

При великих n обчислення визначників безпосередньо за означенням не є доцільним, оскільки вимагає знаходження $n!$ добутків. Так, для визначника четвертого порядку треба рахувати 24 добутки, для визначника п’ятого порядку — 120 добутків і т. д. На практиці одним із дієвих способів обчислення визначників є *метод накопичення нулів:* визначник перетворюють так, щоб в одному з його рядків або стовпчиків всі елементи (за винятком, можливо, одного) стали рівними нулю.

Оберненою матрицею для квадратної матриці A називається матриця, яка задовольняє рівності:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матриця A має обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена, тобто її визначник не дорівнює нулю: $\det A \neq 0$. Якщо $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Обчисліть визначники:

$$1.1)\begin{vmatrix}2&-3&1&5\\1&0&-3&2\\-2&0&6&1\\3&0&2&4\end{vmatrix},\quad 1.2)\begin{vmatrix}1&3&-1&1\\2&1&5&3\\4&0&0&0\\-1&2&6&-2\end{vmatrix},\quad 1.3)\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\-2&-3&5&-1\\-1&1&2&4\\3&8&-2&10\end{vmatrix}.$$

2. Знайдіть матрицю, обернену даній, та виконайте перевірку:

$$2.1)\ A=\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix},\quad 2.2)\ B=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&6&11\\-3&-2&-4\end{pmatrix},\quad 2.3)\ C=\begin{pmatrix}2&4&1\\-3&2&-1\\5&9&2\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть матричні рівняння:

$$3.1)\begin{pmatrix}8&5\\3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}7&-1\\4&6\end{pmatrix},\quad 3.2)\ X\begin{pmatrix}-2&3&1\\-5&6&3\\6&-7&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&2&1\\2&1&-2\end{pmatrix}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Обчисліть визначники:

$$1.1)\begin{vmatrix}5&2&-1&-3\\1&2&-3&0\\4&5&1&0\\6&-8&9&0\end{vmatrix},\quad 1.2)\begin{vmatrix}-1&2&6&1\\3&4&5&3\\0&0&2&0\\2&4&9&7\end{vmatrix},\quad 1.3)\begin{vmatrix}1&2&-3&4\\-1&-1&5&-3\\2&6&-3&11\\4&10&-9&17\end{vmatrix}.$$

2. Знайдіть матрицю, обернену даній, та виконайте перевірку:

$$2.1)\ A=\begin{pmatrix}11&7\\8&5\end{pmatrix},\quad 2.2)\ B=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&2&11\\19&3&4\end{pmatrix},\quad 2.3)\ C=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&-1&6\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть матричні рівняння:

$$3.1)\ X\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4\\-2&1\end{pmatrix},\quad 3.2)\begin{pmatrix}1&3&7\\-2&3&-10\\-3&2&16\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}5&1&-3\\2&4&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Тема 4. Ранг матриці

Теоретичні відомості

Мінором порядку k довільної матриці називається визначник, що утворений з елементів матриці, які стоять на перетині довільних k рядків та стовпчиків матриці. Зокрема, мінорами першого порядку матриці є її елементи.

Рангом матриці називається таке ціле невід'ємне число r, що задовольняє двом умовам: 1) в матриці існує мінор порядку r, який відмінний від нуля; 2) всі мінори, порядок яких дорівнює $(r+1)$ і вище, рівні нулю (якщо такі мінори існують). Ранг матриці A позначається так: $\operatorname{rank} A$.

Властивості рангу

1. Ранг матриці дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вона є нульовою.
2. Ранг квадратної матриці дорівнює її порядку тоді і тільки тоді, коли матриця є невиродженою.
3. Ранг не перевищує меншого з чисел: кількості її рядків та кількості стовпчиків.
4. Ранг матриці не змінюється при транспонуванні.

Для обчислення рангу матриці використовують різні методи. Одним із таких методів є *метод обвідних мінорів.* Цей метод базується на використанні наступної теореми.

Теорема. Якщо матриця містить мінор порядку r, відмінний від нуля, а всі мінори порядку $(r+1)$, які обводять цей мінор, дорівнюють нулю, то ранг такої матриці дорівнює r.

Іншим методом є використання *елементарних рядкових перетворень.* Існують три типи елементарних рядкових перетворень.

1. Транспозиція (зміна місцями) двох рядків матриці.
2. Множення всіх елементів будь-якого рядка матриці на довільне число, крім нуля.
3. Додавання до елементів будь-якого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на одне і те ж число.

Властивості елементарних рядкових перетворень

1. При елементарних перетвореннях матриці ранг не змінюється.
2. За допомогою скінченної кількості елементарних рядкових перетворень будь-яку матрицю можна привести до східчастого вигляду.
3. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Таким чином, для знаходження рангу матриці її можна привести до східчастого вигляду. В східчастій матриці, яка при цьому буде отримана, потрібно порахувати кількість її ненульових рядків. Ця кількість і буде дорівнювати рангу початкової матриці.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть ранг матриці методом обвідних мінорів:

$$1.1)\ A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 8\\ 11 & -11 & 33 & 44\end{pmatrix},\quad 1.2)\ B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 6\end{pmatrix},\quad 1.3)\ C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 3 & 5 & 0\\ 3 & -5 & 6 & 14 & 12\\ -7 & 2 & 13 & 23 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть ранг матриці методом елементарних рядкових перетворень:

$$2.1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 5 & 8 & 1\\ -1 & -3 & 1 & 2\\ -3 & -4 & -7 & 5\end{pmatrix},\ 2.2)\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 5 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 9\\ 5 & 2 & 17\end{pmatrix},\quad 2.3)\ C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2 & 6 & 7\\ 2 & -5 & 1 & 3 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & 1 & -8 & -6\\ 4 & -11 & 9 & 7 & 10 & 15\end{pmatrix}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть ранг матриці методом обвідних мінорів:

$$1.1)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 6 & 9 & -3 & 15\\ 4 & 6 & -2 & 10\end{pmatrix},\quad 1.2)\ B=\begin{pmatrix}6 & 7 & 8\\ -1 & 2 & 3\\ 4 & 11 & 14\end{pmatrix},\quad 1.3)\ C=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2 & -4 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6 & 8\\ 5 & 12 & 3 & -2 & 22\\ 2 & -3 & -3 & 10 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть ранг матриці методом елементарних рядкових перетворень:

$$2.1)\ A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & 2\\ -1 & -2 & 6 & 3\\ 2 & 7 & -6 & 8\\ 3 & 12 & -10 & 5\end{pmatrix},\ 2.2)\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 9\\ -3 & 1 & -8\\ 5 & 2 & 17\\ 4 & -7 & 4\end{pmatrix},\quad 2.3)\ C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 6 & 5 & 3\\ -2 & 5 & 3 & 0 & -2 & 4\\ 1 & -1 & 6 & 18 & 13 & 13\\ -3 & 7 & 2 & -6 & -7 & 1\end{pmatrix}.$$

Тема 5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі. Формули Крамера.

Теоретичні відомості

Системою із m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases} \qquad (1)$$

В цій системі величини $a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ є заданими числами, які називаються ***коефіцієнтами системи***, величини $b_1,\dots,b_m$ також є заданими числами, які називаються ***вільними членами системи***, і $x_1,\dots,x_n$ – невідомі.

Розв'язком системи називається впорядкований набір із n чисел, при підстановці якого в систему кожне її рівняння перетворюється на правильну числову рівність.

Система називається ***сумісною,*** якщо вона має розв'язки, і ***несумісною,*** якщо розв'язків не має. Сумісна система називається ***визначеною,*** якщо вона має лише один розв'язок, і ***невизначеною,*** якщо таких розв'язків більше одного.

Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь утворюють дві матриці. Матриця, складена з коефіцієнтів системи рівнянь, називається ***основною матрицею системи:***

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо додати ще стовпчик з вільними членами, то утворюється ***розширена матриця системи:***

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема *(Кронекер-Капеллі).* Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги її основної та розширеної матриць рівні:

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}\bar{A}.$$

Нехай в системі (1) однакова кількість рівнянь та невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Визначник основної матриці системи називається ***визначником системи*** (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для розв’язання системи потрібно ще знайти n визначників:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема (Крамер). Якщо визначник системи (2) не дорівнює нулю: $\Delta \neq 0$, то така система є визначеною, а її розв’язок знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \dots, \ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Ці формули називаються ***формулами Крамера.***

Завдання для авдиторної роботи

1. Дослідіть сумісність системи рівнянь, користуючись теоремою Кронекера-Капеллі:

$$1.1)\ \begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4x - 6y = 11, \end{cases} \quad 1.2)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 5, \\ 2x + 5y - 2z = 16, \\ x + 3y + z = 7, \end{cases} \quad 1.3)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 8x_4 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

2. Розв’яжіть систему рівнянь методом Крамера:

$$2.1)\ \begin{cases} 2x - 7y = -11, \\ 3x + 11y = 48, \end{cases} \quad 2.2)\ \begin{cases} 2x - 5y + z = 9, \\ x + 2y + 6z = 10, \\ -x + 3y + 5z = 1, \end{cases} \quad 2.3)\ \begin{cases} 3x - y + 4z = 5, \\ x + 4y - z = -7, \\ 6x + y + 3z = 4. \end{cases}$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Дослідіть сумісність системи рівнянь, користуючись теоремою Кронекера-Капеллі:

$$1.1)\ \begin{cases} -3x + 4y = 7, \\ 9x - 12y = 20, \end{cases} \quad 1.2)\ \begin{cases} x - 4y + 2z = 6, \\ 4x - 17y + 11z = 19, \\ x - 2y - 4z = 18, \end{cases} \quad 1.3)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 20, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

2. Розв’яжіть систему рівнянь методом Крамера:

2.1) $\begin{cases} 5x-7y=41, \\ 11x+2y=38, \end{cases}$ 2.2) $\begin{cases} x+5y-3z=-6, \\ 2x+3y+z=2, \\ -x+4y+2z=-12, \end{cases}$ 2.3) $\begin{cases} x-y+4z=14, \\ -x+7y+2z=4, \\ 3x+y-4z=-6. \end{cases}$

Тема 6. Метод оберненої матриці

Теоретичні відомості

Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{3}$$

розглядаються три матриці. Це основна матриця системи:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

матриця-стовпчик невідомих:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

та матриця-стовпчик вільних членів:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Систему (3) можна замінити одним матричним рівнянням:

$$AX=B.$$

Якщо матриця системи (3) невироджена, то розв’язок матричного рівняння визначається за формулою

$$X=A^{-1}B.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Розв’яжіть системи матричним методом:

$$1.1)\begin{cases}x+3y-4z=7,\\-2x+5y+z=8,\\3x-y+5z=1.\end{cases}\quad 1.2)\begin{cases}x-y+z=-2,\\2x+y-2z=9,\\4x-2y+5z=5.\end{cases}\quad 1.3)\begin{cases}2x-y-z=0,\\x+y-3z=11,\\3x-2y+z=-7.\end{cases}$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Розв’яжіть системи матричним методом:

$$1.1)\begin{cases}2x+y+3z=-4,\\x+5y-z=3,\\4x-y-2z=8.\end{cases}\quad 1.2)\begin{cases}x-y+2z=11,\\2x+2y+z=6,\\3x+2y-z=0.\end{cases}\quad 1.3)\begin{cases}x-y+4z=3,\\3x-4y+z=7,\\-x+7y+2z=9.\end{cases}$$

Тема 7. Метод Гаусса

Теоретичні відомості

Нехай в системі

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{4}$$

коефіцієнт $a_{11}\neq 0$. Якщо це так, то рівняння в цій системі можна поміняти місцями так, щоб першим рівнянням в системі було рівняння, в якому коефіцієнт біля першої невідомої дорівнює нулю. Якщо обидві частини першого рівняння помножити на число $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і після цього почленно додати до другого рівняння, то в ньому буде виключена перша невідома:

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}x_1+a_{21}x_1=-a_{21}x_1+a_{21}x_1=0.$$

Аналогічно можна виключити невідому x_1 з усіх інших рівнянь. В результаті таких рівносильних перетворень система (4) буде зведена до еквівалентної:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\\qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2,\\\qquad\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\qquad\quad a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m.\end{cases}$$

Якщо $a'_{21}\neq 0$, то аналогічно цю систему приводять до еквівалентної, в якій в усіх рівняннях, починаючи з третього, буде виключена невідома x_2. Такі перетворення виконуються до тих пір, поки не буде виключена максимально можлива кількість невідомих.

Метод Гаусса зручно реалізується в матричній формі. Для цього потрібно скласти розширену матриці системи (4) і привести її до східчастого вигляду. Після цього в знайденій східчастій матриці потрібно вилучити нульові рядки, якщо вони є. Якщо в отриманій матриці міститиметься рядок виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k \end{pmatrix},\ k \neq 0,$$

то в такому випадку система (4) несумісна. Якщо ж такого рядка немає, то потрібно за матрицею відновити система. Така система буде рівносильною системі (4).

Якщо в цій системі кількість рівнянь і невідомих однакова кількість, то в такому випадку система має єдиний розв'язок. Його знаходять, визначаючи послідовно невідомі, починаючи з останнього рівняння.

В разі ж, якщо в отриманій системі кількість рівнянь менша кількості невідомих, система має безліч розв'язків. Тоді невідомі поділяють на два типи. ***Базисними*** невідомими називаються такі невідомі, які відповідають першим ненульовим коефіцієнтам в отриманій східчастій матриці, з якої видалені нульові рядки. Решта невідомих називаються ***вільними.*** Із системи, починаючи з останнього рівняння, виражають послідовно базисні невідомі через вільні. Надаючи вільним невідомим довільних значень, можна отримати всі можливі розв'язки системи (4).

Завдання для авдиторної роботи

1. Розв'яжіть системи методом Гаусса або встановіть її несумісність:

$$1.1)\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ 2x-y+4z=12, \\ -3x+y+2z=5. \end{cases} \quad 1.2)\begin{cases} 2x-y+3z=4, \\ x+5y-z=7, \\ 3x-7y+7z=2. \end{cases} \quad 1.3)\begin{cases} x+3y-2z=4, \\ 2x+7y+3z=2, \\ 3x+10y+z=6, \\ -2x-5y+11z=-14. \end{cases}$$

$$1.4)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=5, \\ 2x_1+5x_2+3x_3-6x_4+5x_5=12, \\ 3x_1+5x_2+13x_3-15x_4+4x_5=20, \\ x_1+3x_2+x_3-3x_4+8x_5=14. \end{cases} \quad 1.5)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=3, \\ -x_1+3x_2+x_3+4x_4=-1, \\ 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=6, \\ 3x_1-x_2+4x_3-2x_4=5. \end{cases}$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Розв'яжіть системи методом Гаусса або встановіть її несумісність:

$$1.1)\begin{cases} x-3y+z=6, \\ 2x+y-3z=-8, \\ -3x+y+5z=14. \end{cases} \quad 1.2)\begin{cases} 3x+y-2z=6, \\ x-y+3z=4, \\ 2x+2y-5z=7. \end{cases} \quad 1.3)\begin{cases} x-2y+4z=5, \\ -3x+7y-10z=8, \\ -2x+5y-6z=13, \\ x-3y+2z=-18. \end{cases}$$

$$1.4)\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=5, \\ 2x_1+7x_2-x_3+6x_4+15x_5=18, \\ 3x_1+8x_2-8x_3+18x_4+28x_5=5, \\ x_1+4x_2+2x_3+6x_4+16x_5=11. \end{cases} \quad 1.5)\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+4x_4=-4, \\ 2x_1-x_2-5x_3+x_4=5, \\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=6, \\ -x_1+4x_2+6x_3+3x_4=1. \end{cases}$$

Розділ 2. Елементи аналітичної геометрії

Тема 1. Система координат

Теоретичні відомості

Пряма, на якій обрано напрям, називається ***віссю. Прямокутна декартова система координат*** в просторі складається з трьох взаємно перпендикулярних осей, що проходять через одну точку. При цьому на кожній з осей заданий один і той же масштаб (вказаний одиничний відрізок). Точка, через яку проходять координатні осі, називається ***початком координат*** і позначається буквою O. Самі осі позначаються Ox, Oy та Oz і називаються відповідно ***вісь абсцис, вісь ординат та вісь аплікат.*** Напрям, вказаний на осях координат, називається додатним напрямом, а протилежний — від'ємним. Відповідно на кожній із координатних осей розрізняють додатну піввісь та від'ємну піввісь.

Через кожну пару координатних осей проходить площина. Ці площини називаються ***координатними площинами.*** Позначаються вони так: xOy, xOz, yOz.

Координати точки простору визначаються наступним чином. Для довільної точки M розглядаються її проєкції M_x, M_y та M_z на осі Ox, Oy та Oz відповідно (рис. 1).

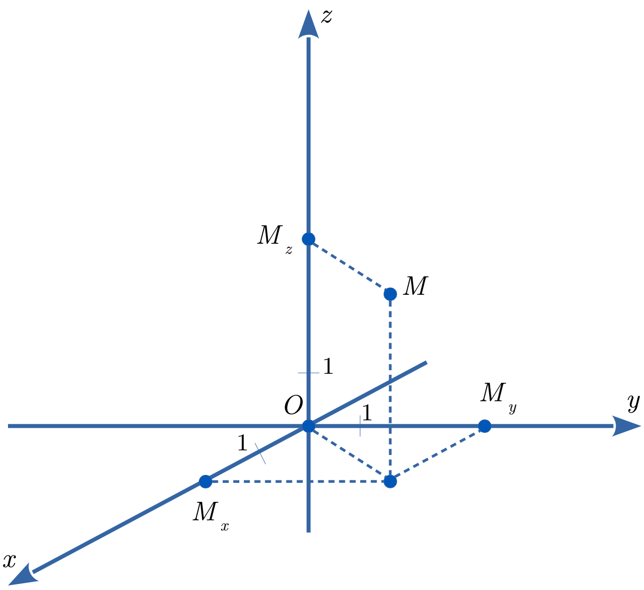


Рис. 1

Абсцисою x точки M називається довжина відрізка OM_x, взята зі знаком плюс, якщо точка M_x лежить на додатній півосі Ox і зі знаком мінус — якщо на від'ємній. Аналогічно визначаються ордината y та апліката z точки M.

Таким чином, кожній точці M простору ставиться у відповідність впорядкована трійка чисел — її координати: абсциса, ордината та апліката: $M(x, y, z)$.

Аналогічно вводяться прямокутні декартові координати на площині. Єдина відмінність полягає в тому, що на площині для задання положення точки потрібно вказати дві координати: абсцису та ординату (рис. 2).

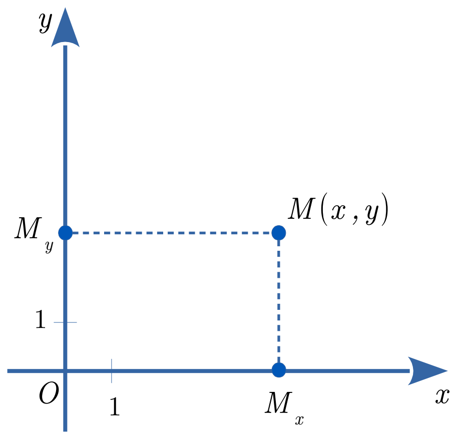


Рис. 2

До найпростіших задач аналітичної геометрії відносять наступні три задачі.

1) Задача знаходження відстані між двома точками. Якщо в просторі задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то відстань між ними визначається за формулою

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2) Знаходження середини відрізка. Якщо в просторі задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати середини відрізка AB визначаються з формул

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3) Задача про поділ відрізка у заданому відношенні. Якщо в просторі задано точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$, то координати точки M, що поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{AM}{MB}$, визначаються з формул

$$x_\lambda = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y_\lambda = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z_\lambda = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

На площині формули, за якими розв'язуються дані задачі, такі ж самі, але без виразів для аплікати.

Завдання для авдиторної роботи

1. Вкажіть координатну вісь або площину, на якій знаходяться точки

$$A(0, 0, 4),\ B(0, 2, 0),\ C(2, 6, 0),\ D(-1, 0, 5),\ E(7, 0, 0).$$

2. Задано точки $A(-1, 2, 4), B(3, 2, 7)$. Знайдіть:

2.1) відстань між цими точками;

2.2) координати середини відрізка AB;

2.3) координати точки M, яка поділяє відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{3}$.

3. Дано точку $A(2\,,-3\,,4)$. Знайдіть точки, які симетричні точці A відносно всіх координатних осей та площині і початку координат.

4. Знайдіть проєкції точки $M(4\,,6\,,-8)$ на координатні площини та координатні осі.

5. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $K(-4\,,2\,,6)$ відносно точки $A(1\,,-3\,,4)$.

6. Точки $A(-1\,,5\,,3)$, $C(2\,,3\,,9)$ є протилежними вершинами квадрата. Знайдіть його площу.

7. Точки $A(3\,,-1\,,6)$, $B(2\,,0\,,7)$ та $C(5\,,-3\,,2)$ є послідовними вершинами паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати його четвертої вершини D.

8. Доведіть, що точки $A(1\,,2\,,-4)$, $B(3\,,8\,,-1)$, $C(7\,,20\,,5)$ лежать на одній прямій.

9. На осі ординат знайдіть таку точку, яка рівновіддалена від точок $A(3\,,1\,,4)$ та $B(5\,,2\,,-1)$.

10. Точки $A(-1\,,2\,,5)$, $C(0\,,6\,,-3)$ є кінцями діагоналі грані куба. Знайдіть об'єм цього куба.

11. Точки $A(2\,,1\,,5)$, $B(-2\,,4\,,6)$, $C(0\,,8\,,-4)$ є вершинами трикутника. Знайдіть довжину медіани цього трикутника, що проведена з вершини A та координати точки, в якій перетинаються діагоналі трикутника ABC.

12. Точки $A(-1\,,2\,,4)$, $B(3\,,5\,,4)$, $C(5\,,8\,,10)$ є вершинами трикутника. Знайдіть довжину бісектриси цього трикутника, яка проведена з вершини B.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Вкажіть координатну вісь або площину, на якій знаходяться точки

$$A(5\,,0\,,0),\ B(0\,,0\,,-8),\ C(0\,,7\,,8),\ D(2\,,0\,,-12),\ E(3\,,-1\,,0).$$

2. Задано точки $A(5\,,-3\,,0)$, $B(6\,,1\,,8)$. Знайдіть:

2.1) відстань між цими точками;

2.2) координати середини відрізка AB;

2.3) координати точки M, яка поділяє відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB}=\frac{4}{5}$.

3. Дано точку $A(-5\,,6\,,-12)$. Знайдіть точки, які симетричні точці A відносно всіх координатних осей та площині і початку координат.

4. Знайдіть проєкції точки $K(-2\,,-7\,,3)$ на координатні площини та координатні осі.

5. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $L(6\,,\,1\,,-4)$ відносно точки $B(-2,\,1,\,-6)$.

6. Точки $A(2\,,\,0\,,\,1)$, $C(-4\,,\,1\,,\,-3)$ є вершинами трикутника. Знайдіть його площу.

7. Точки $A(1\,,-2,\,3)$, $B(-2,\,4\,,\,8)$ є суміжними вершинами паралелограма $ABCD$, а точка $L(-2\,,\,3\,,\,6)$ є точкою перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин C та D.

8. Доведіть, що точки $A(3\,,\,1\,,-4)$, $B(5\,,\,2\,,-7)$, $C(-5\,,-3\,,\,8)$ лежать на одній прямій.

9. На осі аплікат знайдіть таку точку, яка рівновіддалена від точок $C(3\,,-2\,,\,4)$ та $D(2\,,\,7\,,-1)$.

10. Точки $B(4\,,\,1\,,\,7)$, $C(3\,,-1\,,\,11)$ є кінцями діагоналі грані куба. Знайдіть повну поверхню цього куба.

11. Точки $K(3\,,\,4\,,-2)$, $L(1\,,\,3\,,-1)$, $M(3\,,-5\,,\,1)$ є вершинами трикутника. Знайдіть довжину медіани цього трикутника, що проведена з вершини K та координати точки, в якій перетинаються діагоналі трикутника KLM.

12. Точки $A(2\,,-1\,,\,5)$, $B(3\,,\,1\,,\,3)$, $C(0\,,\,4\,,-9)$ є вершинами трикутника. Знайдіть довжину бісектриси цього трикутника, яка проведена з вершини A.

Тема 2. Вектори. Лінійні операції з векторами

Теоретичні відомості

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, в якому вказано, яка точка є початком, а яка — кінцем. Вектор з початком в точці A і кінцем в точці B позначається одним із способів: $\overrightarrow{AB}$ або $\overline{AB}$. Часто вектори позначаються однією буквою: $\vec{a}\,,\vec{b}$ тощо. На рисунку вектори зображаються відрізками зі стрілками, що напрямлені до кінця вектора (рис. 3).

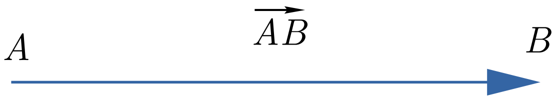


Рис. 3

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначається наступним чином: $|\overrightarrow{AB}|$.

Основні види векторів

1. ***Нульовий вектор.*** Це вектор, у якого початок співпадає з кінцем. Такий вектор позначається символом $\vec{o}$. Напрям нульового вектора не визначений, а модуль за означенням дорівнює нулю.

2. ***Одиничний вектор (орт).*** Це вектор, модуль якого дорівнює одиниці.

3. ***Колінеарні вектори.*** Так називаються вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих. За означенням нульовий вектор колінеарний будь-якому іншому вектору. Колінеарні

вектори можуть бути однаково або протилежно напрямленими. На рис. 4 вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ однаково напрямлені, а пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$ та $\vec{b}$ і $\vec{c}$ напрямлені протилежно.

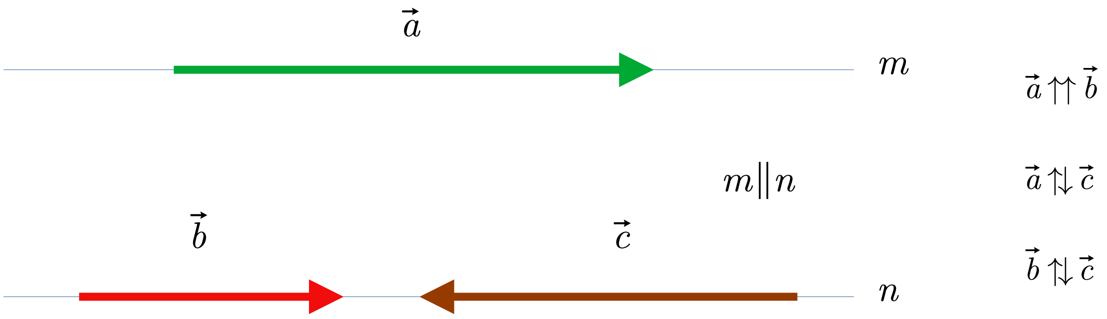


Рис. 4

4. ***Компланарні вектори.*** Так називаються вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Вектори називаються ***рівними,*** якщо вони однаково напрямлені та мають рівні модулі:

$$\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|,\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}.$$

Лінійні операції з векторами

До лінійних операцій, які виконуються з векторами, належать додавання, віднімання векторів та множення вектора на число.

1. ***Сума векторів.*** Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{a}+\vec{b}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{b}$ при умові, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$. Таке правило додавання векторів називається ***правилом трикутника*** (рис. 5).

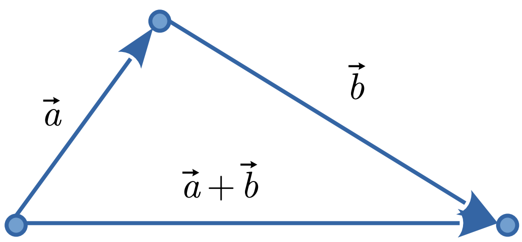


Рис. 5

Друге правило додавання векторів називається ***правилом паралелограма.*** Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ зведені до спільного початку, то на них як на сторонах будується паралелограм. Сума векторів $\vec{a}+\vec{b}$ є вектором, що співпадає з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить зі спільної вершини векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 6).

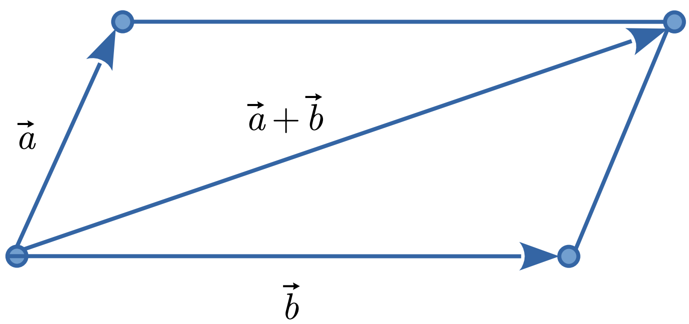


Рис. 6

2. ***Різниця векторів.*** Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c} \;\Leftrightarrow\; \vec{b}+\vec{c}=\vec{a}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ зведені до спільного початку, то для побудови їхньої різниці треба відкласти вектор від кінця від'ємника, тобто вектора $\vec{b}$, до кінця зменшуваного, тобто вектора $\vec{a}$ (рис. 7).

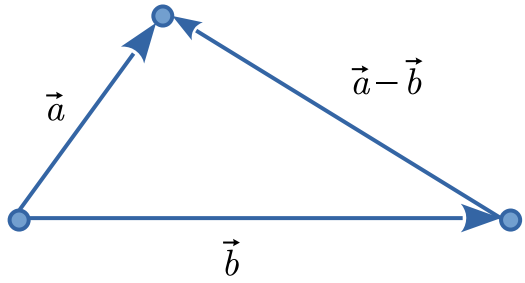


Рис. 7

3. ***Множення вектора на число.*** Добутком вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор $k\vec{a}$, який визначається двома умовами:

1) $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$;

2) $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, якщо $k>0$; $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, якщо $k<0$.

Координати вектора в просторі визначаються як впорядкована трійка чисел, що є проєкціями цього вектора на осі координат.

В просторі вводиться ***ортонормований базис.*** Так називається впорядкована трійка векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, які задовольняють умови:

1) вектор $\vec{i}$ лежить на осі абсцис, вектор $\vec{j}$ – на осі ординат, вектор $\vec{k}$ – на осі аплікат;

2) напрями всіх трьох векторів співпадають з напрямами осей, на яких вони розташовані;

3) вектори є ортами: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

Будь-який вектор простору $\vec{a}$ єдиним чином може бути розкладеним за базисом $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, тобто може бути представлений у вигляді

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

Коефіцієнти цього розкладу, тобто числа a_x, a_y, a_z, співпадають з координатами вектора $\vec{a}$.

Аналогічно вводяться координати вектора на площині. При цьому на площині ортонормований базис утворює впорядкована пара векторів $\vec{i},\vec{j}$, а будь-який вектор площини єдиним чином розкладається за базисом:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}.$$

Операції з векторами в координатній формі

1. Якщо задано дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, потрібно від координат кінця вектора відняти відповідні координати його початку:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

2. Якщо k – довільне число і задані координати двох векторів $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, то справедливі наступні рівності:

1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$, $\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z)$;

3) $k\vec{a}=(ka_x, ka_y, ka_z)$.

3. Вектори $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

4. Вектори $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{b}=(c_x, c_y, c_z)$ компланарні тоді і тільки тоді, коли визначник, складений з координат цих векторів, дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Задано точки $A(-1, 5, 4)$, $B(2, 1, -8)$. Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

2. Знайдіть координати вектора $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(2, 3, -1)$, $\vec{b}=(8, -2, 5)$.

3. Дано два вектори: $\vec{a}=(2, -4, 3)$, $\vec{b}=(-8, 16, -12)$. Доведіть, що вони колінеарні. Який з цих векторів довший і у скільки разів? Як напрямлені ці вектори: однаково чи протилежно?

4. При яких значеннях m та n вектори $\vec{a}=(5, m, -4)$, $\vec{b}=(n, 6, -8)$ будуть колінеарними?

5. Доведіть, що точки $A(1, 3, 5)$, $B(3, 0, 6)$, $C(4, -7, 6)$ та $D(0, -1, 4)$ є вершинами трапеції.

6. Знайдіть такі значення k, при яких вектори $\vec{a}=(1, 2, 14)$, $\vec{b}=(2, k, -4)$, $\vec{c}=(-1, 3, k)$ будуть компланарними.

7. Доведіть, що точки $A(5,1,-3)$, $B(6,-1,-8)$, $C(7,8,-2)$, $D(6,5,-2)$ лежать в одній площині.

8. В трикутнику ABC дано $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Точка M є серединою сторони BC, а точка L належить стороні AC, причому $AL:LC=1:4$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ та $\overrightarrow{BL}$ через вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

9. Відомо, що $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$. Знайдіть $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Задано точки $C(2,-2,6)$, $D(3,2,14)$. Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{CD}$.

2. Знайдіть координати вектора $\vec{d}=4\vec{b}+5\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(5,-4,0)$.

3. Дано два вектори: $\vec{a}=(5,2,-6)$, $\vec{b}=(15,6,-18)$. Доведіть, що вони колінеарні. Який з цих векторів довший і у скільки разів? Як напрямлені ці вектори: однаково чи протилежно?

4. При яких значеннях m та n вектори $\vec{a}=(2,14,n)$, $\vec{b}=(m,7,-5)$ будуть колінеарними?

5. Доведіть, що точки $A(2,3,-4)$, $B(0,2,1)$, $C(4,5,0)$, та $D(14,12,-7)$ є вершинами трапеції.

6. Знайдіть такі значення k, при яких вектори $\vec{l}=(k,2,-4)$, $\vec{m}=(1,k,-2)$, $\vec{n}=(-1,4,2)$ будуть компланарними.

7. Доведіть, що точки $K(-1,3,2)$, $L(0,0,15)$, $M(1,4,7)$, $N(2,5,8)$ лежать в одній площині.

8. В трикутнику KLM дано $\overrightarrow{KL}=\vec{p}$, $\overrightarrow{KM}=\vec{q}$. Точка C є серединою сторони KM, а точка D належить стороні LM, причому $LD:DM=2:3$. Виразіть вектори $\overrightarrow{KD}$ та $\overrightarrow{LC}$ через вектори $\vec{p}$ та $\vec{q}$.

9. Відомо, що $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}-\vec{b}|=5$. Знайдіть $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Тема 3. Скалярний добуток векторів

Теоретичні відомості

Кутом між векторами, які приведені до спільного початку, називається найменший з кутів, на який треба повернути один із векторів так, щоб він був однаково напрямленим з другим вектором. Таким чином, кут між векторами завжди лежить в межах від 0 до π. Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0, а між протилежно напрямленими – π (рис. 8).

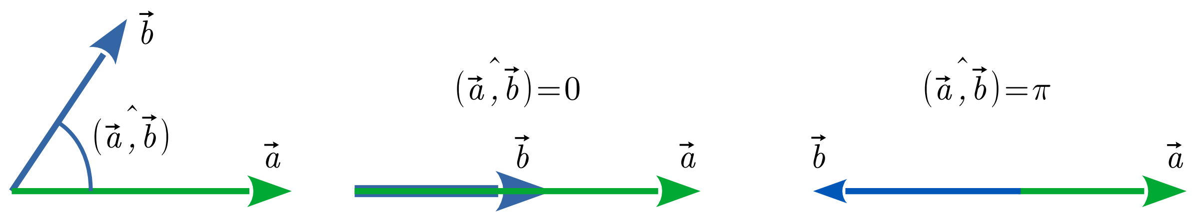


Рис. 8

Скалярним добутком векторів називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}).$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}$;

2. $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b}),\ \ \lambda\in\mathbb{R}$;

3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}$;

4. $\vec{a}\,\vec{o}=0$.

Геометричні властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток неколінеарних векторів додатний (від’ємний) тоді і тільки тоді, коли кут між цими векторами гострий (тупий).

2. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні:

$$\vec{a}\,\vec{b}=0\ \Leftrightarrow\ \vec{a}\perp\vec{b}.$$

3. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2.$$

Фізичний зміст скалярного добутку

Якщо на тіло діє сила $\vec{F}$ і під дією цієї сили тіло здійснює переміщення $\vec{s}$, то робота A, яку виконує при цьому сила, дорівнює скалярному добутку сили на переміщення:

$$A=\vec{F}\,\vec{s}.$$

Скалярний добуток в координатах

Якщо відомі координати векторів: $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, то скалярний добуток цих векторів знаходиться за формулою:

$$\vec{a}\,\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

Косинус кута між векторами знаходиться за формулою

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

В координатній формі ця формула має вигляд

$$\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 120°. Відомі також модулі цих векторів: $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=8$. Знайдіть: 1.1) $(2\vec{a}-3\vec{b})(5\vec{a}+4\vec{b})$; 1.2) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}=(-1,\,4,\,6)$, $\vec{b}=(2,\,-3,\,7)$.

3. Задано координати точок $A(2,\,1,\,-3)$, $B(-1,\,5,\,6)$, $C(0,\,-2,\,-7)$. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$.

4. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(1,\,-2,\,2)$, $\vec{b}=(4,\,-1,\,8)$.

5. При якому значенні k вектори $\vec{a}=(7,\,-1,\,k)$, $\vec{b}=(2,\,k,\,8)$ будуть перпендикулярними?

6. Дано координати трьох точок $A(4,\,7,\,-3)$, $B(-3,\,8,\,8)$, $C(1,\,2,\,-1)$. Доведіть, що трикутник ABC – прямокутний.

7. Під дією сили $\vec{F}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ тіло переміщується з точки $A(1,\,2,\,4)$ в точку $B(2,\,5,\,8)$. Знайдіть роботу, яку виконує сила.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 60°. Відомі також модулі цих векторів: $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=10$. Знайдіть: 1.1) $(3\vec{a}+2\vec{b})(2\vec{a}-5\vec{b})$; 1.2) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}=(3,\,0,\,-4)$, $\vec{b}=(5,\,2,\,6)$.

3. Задано координати точок $A(4,\,-1,\,2)$, $B(3,\,2,\,-1)$, $C(1,\,0,\,6)$. Знайдіть скалярний добуток $\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BC}$.

4. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(2,\,3,\,-6)$, $\vec{b}=(4,\,-3,\,-12)$.

5. При якому значенні k вектори $\vec{c}=(k,\,-6,\,2)$, $\vec{d}=(3,\,k,\,12)$ будуть перпендикулярними?

6. Дано координати трьох точок $K(3,\,1,\,-1)$, $L(9,\,0,\,1)$, $M(4,\,-1,\,-5)$. Доведіть, що трикутник KLM – прямокутний.

7. Під дією сили $\vec{F}=8\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ тіло переміщується з точки $C(2,\,0,\,5)$ в точку $B(4,\,3,\,9)$. Знайдіть роботу, яку виконує сила.

Тема 4. Векторний добуток векторів

Теоретичні відомості

Впорядкована трійка некомпланарних векторів називається ***правою,*** якщо після приведення їх до спільного початку вони розташовані так, що з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого видно проти стрілки годинника. Якщо ж такий поворот видно за стрілкою годинника, то така трійка векторів називається ***лівою.*** Трійка векторів $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$, що зображена на рис 9, є правою, а на рис. 10 — лівою.

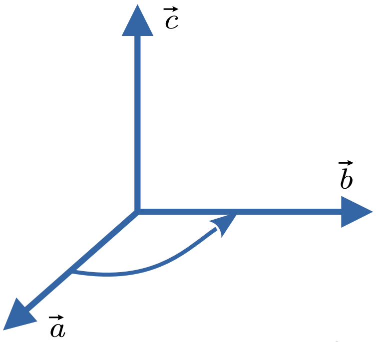


Рис. 9

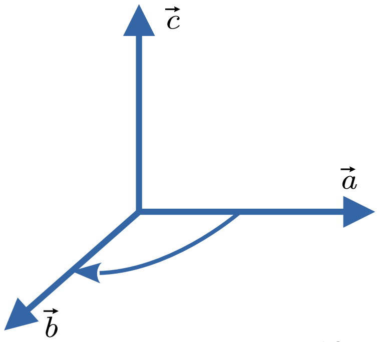


Рис. 10

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що задовольняє трьом умовам:

1) модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}});$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний кожному з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) впорядкована трійка векторів $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ є правою.

Векторний добуток позначається одним із символів: $\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a}\,\vec{b}]$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

4. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$;

5. $\vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}$.

Геометричні властивості векторного добутку

1. Два вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нульовому вектору.

2. Модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах, якщо ці вектори приведені до спільного початку (рис. 11).

3. Модуль векторного добутку дорівнює половині площі трикутника, побудованого на векторах-співмножниках як на сторонах, якщо ці вектори приведені до спільного початку (рис. 12).

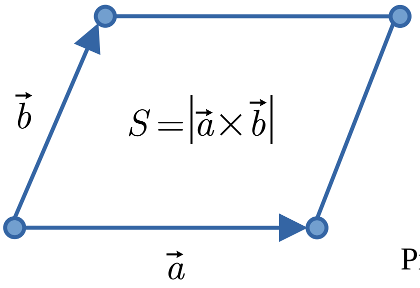


Рис. 11

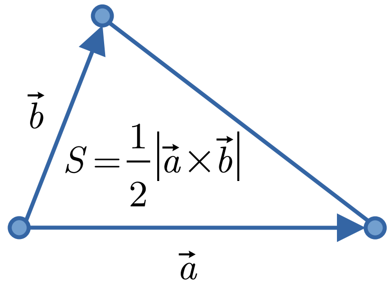


Рис. 12

Фізичний зміст векторного добутку

Якщо на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, то момент цієї сили відносно деякої точки O дорівнює векторному добутку радіус-вектора цієї матеріальної точки відносно точки O і сили (рис. 13.).

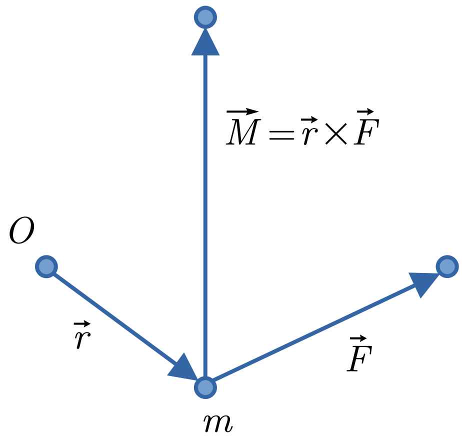


Рис. 13

Векторний добуток в координатах

Якщо $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то справедлива формула

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},$$

або у вигляді символічного визначника

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 45°. Знайдіть $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 4$.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні. Відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$. Знайдіть $|(2\vec{a} - 3\vec{b})(4\vec{a} + 5\vec{b})|$.

3. Знайдіть векторний добуток векторів $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (4, -3, 5)$.

4. Задано координати точок $A(2, -1, 0)$, $B(3, 2, 4)$, $C(-1, 5, 6)$. Знайдіть $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{CA}$.

5. Знайдіть площу трикутника ABC за відомими координатами його вершин:

$$A(2,-3,5),\ B(4,-2,3),\ C(-2,-4,8).$$

6. Сила $\vec{F}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ прикладена до матеріальної точки $A(5,4,1)$. Знайдіть момент цієї сили відносно початку координат.

7. Задано три вектори:

$$\vec{a}=(2,-1,4),\ \vec{b}=(1,0,-2),\ \vec{c}=(2,1,3).$$

Знайдіть $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ і $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 150°. Знайдіть $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=8$, $\left|\vec{b}\right|=12$.

2. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні. Відомо, що $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{b}\right|=6$. Знайдіть $\left|(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-4\vec{b})\right|$.

3. Знайдіть векторний добуток векторів $\vec{a}=(5,1,-2)$, $\vec{b}=(-4,0,1)$.

4. Задано координати точок $A(1,2,-3)$, $B(4,1,0)$, $C(2,1,3)$. Знайдіть $\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{AC})$.

5. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин:

$$A(6,0,-2),\ B(8,-1,1),\ C(10,3,0).$$

6. Сила $\vec{F}=4\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ прикладена до матеріальної точки $A(-1,2,0)$. Знайдіть момент цієї сили відносно точки $B(0,4,5)$.

7. Задано три вектори:

$$\vec{a}=(1,-2,1),\ \vec{b}=(0,3,-1),\ \vec{c}=(4,2,1).$$

Знайдіть $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ і $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

Тема 5. Мішаний добуток векторів

Теоретичні відомості

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$. Таким чином, мішаний добуток одержується в результаті скалярного множення вектора $\vec{c}$ на вектор, що отримується в результаті векторного множення векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Алгебраїчні властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток змінює знак при перестановці будь-яких двох співмножників:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\vec{c},\ (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\vec{a},\ (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\vec{b}.$$

2. Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці співмножників:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(\vec{c}\times\vec{a})\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}\,.$$

3. Мішаний добуток не змінюється, якщо в ньому поміняти місцями знаки векторного та мішаного множень (при цьому векторне множення виконується все одно першим):

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Враховуючи третю з цих властивостей, для мішаного добутку використовують спрощене позначення: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричні властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ додатний тоді і тільки тоді, коли трійка векторів $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle$ є правою.

2. Мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ від'ємний тоді і тільки тоді, коли трійка векторів $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle$ є лівою.

3. Мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

4. Якщо три некомпланарних вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ відкладені від спільного початку, то:

- об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів;
- об'єм трикутної призми, побудованої на цих векторах як на сторонах, дорівнює половині модуля мішаного добутку цих векторів;
- об'єм трикутної піраміди, побудованої на цих векторах як на сторонах, дорівнює одній шостій модуля мішаного добутку цих векторів (рис. 14).

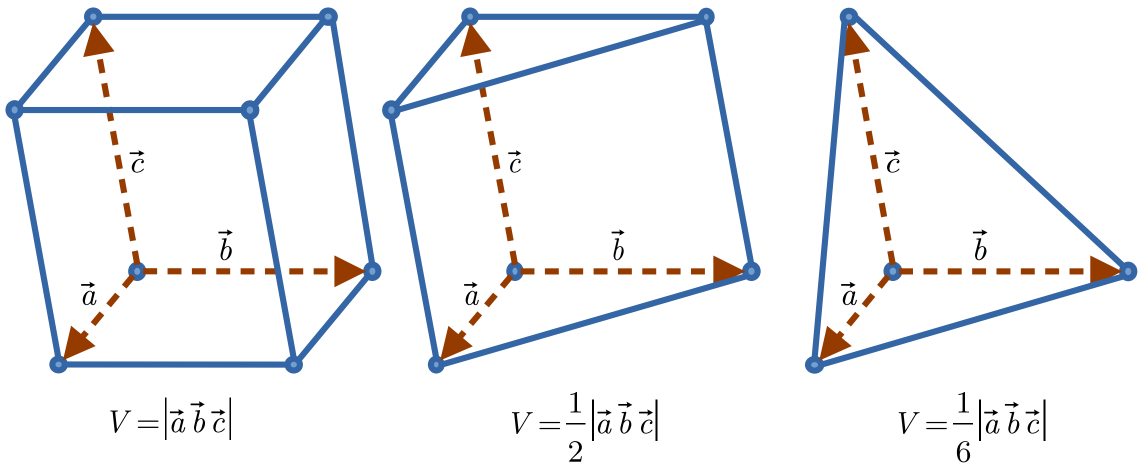


Рис. 14

Мішаний добуток в координатах

Якщо $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$, то має місце формулами

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Обчисліть мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(-1,2,0)$, $\vec{b}=(4,3,-1)$, $\vec{c}=(1,-1,2)$.

2. Доведіть, що вектори $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(2,3,-4)$, $\vec{c}=(1,3,1)$ компланарні.

3. При якому значенні k вектори $\vec{a}=(1,-1,2)$, $\vec{b}=(3,-2,5)$, $\vec{c}=(-1,2,k)$ утворюють праву трійку у вказаній послідовності?

4. Доведіть, що точки $A(1,2,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,5,4)$, $D(2,3,12)$ лежать в одній площині.

5. Знайдіть об'єм піраміди $ABCD$, якщо відомі координати її вершин:

$$A(1,2,-3),\ B(4,1,3),\ C(-1,1,-5),\ D(0,3,4).$$

6. В піраміді $ABCD$ задані координати її вершин:

$$A(8,-1,-1),\ B(6,0,1),\ C(10,5,4),\ D(6,3,1).$$

Знайдіть довжину висоти, яка опущена з вершини D.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Обчисліть мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(5,7,-2)$, $\vec{c}=(4,0,-3)$.

2. Доведіть, що вектори $\vec{a}=(3,-4,1)$, $\vec{b}=(-2,3,5)$, $\vec{c}=(13,-18,-7)$ компланарні.

3. При якому значенні k вектори $\vec{a}=(1,-2,1)$, $\vec{b}=(-1,k,1)$, $\vec{c}=(2,-2,6)$ утворюють ліву трійку у вказаній послідовності?

4. Доведіть, що точки $A(2,-1,4)$, $B(0,2,3)$, $C(-1,2,7)$, $D(1,2,-1)$ лежать в одній площині.

5. Знайдіть об'єм піраміди $ABCD$, якщо відомі координати її вершин:

$$A(4,0,-2),\ B(1,-1,2),\ C(3,2,1),\ D(-1,2,4).$$

6. В піраміді $ABCD$ задані координати її вершин:

$$A(1,2,-10),\ B(-3,10,-2),\ C(4,1,-6),\ D(5,3,12).$$

Знайдіть довжину висоти, яка опущена з вершини D.

Тема 6. Рівняння прямої

Теоретичні відомості

Рівнянням лінії L відносно деякої прямокутної декартової системи координат на площині називається рівняння виду $F(x, y)=0$, яке задовольняють координати тих і тільки тих точок, які лежать на цій лінії.

В залежності від способу, яким задається пряма на площині, можна отримати різні рівняння прямої.

1. Пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий вектор напряму $\vec{l}=(m, n)$.

Параметричні рівняння прямої:

$$x=x_0+mt, \quad y=y_0+nt, \quad -\infty<t<+\infty.$$

Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

2. Якщо пряма проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то рівняння такої прямої має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Кутовим коефіцієнтом прямої називається тангенс кута нахилу цієї прямої до осі абсцис (якщо пряма паралельна осі абсцис, то кут нахилу приймається рівним нулю, і отже, нульовим буде і кутовий коефіцієнт такої прямої). На рис. 15 $\angle BAC=\alpha$ є кутом нахилу прямої m.

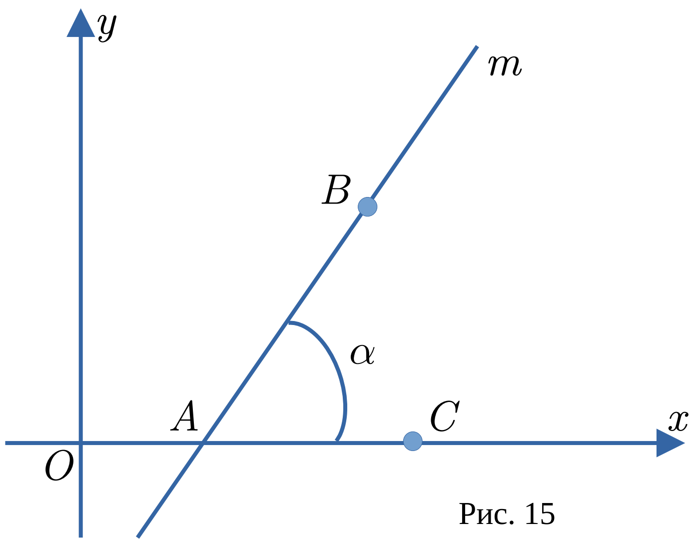


Рис. 15

3. Якщо пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k, то рівняння такої прямої має виглядає

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

4. Рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом має виглядає

$$y = kx + b\,,$$

де b є відрізком, який пряма відтинає на на осі ординат.

5. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий вектор нормалі $\vec{n} = (A, B)$, має виглядає

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

6. Рівняння прямої у відрізках має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,.$$

Числа a та b виражають величини відрізків, взяті з відповідними знаками, які пряма відтинає на осі абсцис та ординат відповідно.

7. Загальне рівняння прямої — це лінійне рівняння з двома змінними:

$$Ax + By + C = 0.$$

В цьому рівнянні принаймні один з коефіцієнтів A чи B не дорівнює нулю: $A^2 + B^2 \neq 0$. Ці числа також є координатами вектора нормалі даної прямої: $\vec{n} = (A, B)$.

Неповні рівняння прямої

Загальне рівняння прямої називається неповним, якщо принаймні один з його коефіцієнтів дорівнює нулю. Всі можливі випадки розташування прямої на площині, що задана неповним рівнянням $Ax + By + C = 0$, зведені до таблиці, в якій через h та k позначено деякі числа.

A	B	C	Рівняння	Розташування прямої на площині
$\neq 0$	$\neq 0$	0	$Ax + By = 0$ або $y = kx$	Пряма проходить через початок координат
0	$\neq 0$	$\neq 0$	$By + C = 0$ або $y = h$	Пряма паралельна осі абсцис
0	$\neq 0$	0	$y = 0$	Пряма співпадає з віссю абсцис
$\neq 0$	0	$\neq 0$	$Ax + C = 0$ або $x = h$	Пряма паралельна осі ординат
$\neq 0$	0	0	$x = 0$	Пряма співпадає з віссю ординат

Завдання для авдиторної роботи

1. Складіть рівняння прямої, яка:

1.1) проходить через точку $A(-1, 3)$ і має напрямний вектор $\vec{l} = (2, -5)$;

1.2) проходить через точку $B(2, -5)$ і має вектор нормалі $\vec{n} = (7, -3)$;

1.3) проходить через точки $A(1\,,\,-2),\ B(3\,,\,4)$.

Всі отримані рівняння приведіть до загального виду.

2. Складіть рівняння прямої, яка:

2.1) проходить через точку $A(2\,,\,8)$ і має кутовий коефіцієнт $k=6$;

2.2) проходить через точку $B(-1\,,\,5)$ і має кут нахилу 135°;

2.3) проходить через початок координат і має кут нахилу 45°.

3. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2\,,\,-5)$ і:

3.1) паралельна осі абсцис;

3.2) паралельна осі ординат.

4. Знайдіть кут нахилу прямої, що проходить через початок координат і точку $A(-\sqrt{3}\,,\,3)$.

5. Представте рівняння прямої $7x-5y-35=0$ у вигляді рівняння прямої у відрізках та побудуйте цю пряму.

6. Знайдіть площу трикутника, який пряма $5x-8y+40=0$ відтинає від координатного кута.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Складіть рівняння прямої, яка:

1.1) проходить через точку $A(2\,,\,-9)$ і має напрямний вектор $\vec{l}=(3\,,\,4)$;

1.2) проходить через точку $B(4\,,\,-8)$ і має вектор нормалі $\vec{n}=(-9\,,\,10)$;

1.3) проходить через точки $A(2\,,\,6),\ B(7\,,\,-1)$.

Всі отримані рівняння приведіть до загального виду.

2. Складіть рівняння прямої, яка:

2.1) проходить через точку $A(3\,,\,-5)$ і має кутовий коефіцієнт $k=7$;

2.2) проходить через точку $B(-4\,,\,6)$ і має кут нахилу 60°;

2.3) проходить через початок координат і має кут нахилу 135°.

3. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4\,,\,2)$ і:

3.1) паралельна осі абсцис;

3.2) паралельна осі ординат.

4. Знайдіть кут нахилу прямої, що проходить через початок координат і точку $A(-1\,,\,-\sqrt{3})$.

5. Представте рівняння прямої $5x-3y+15=0$ у вигляді рівняння прямої у відрізках та побудуйте цю пряму.

6. Знайдіть висоту трикутника, який пряма $12x-5y-60=0$ відтинає від координатного кута, що проведена з початку координат.

Тема 7. Взаємне розташування двох прямих на площині. Метричні задачі.

Теоретичні відомості

Дві різні прямі на площині можуть або перетинатися, або бути паралельними. Кут між паралельними прямими приймається рівним нулю за означенням. Якщо ж прямі перетинаються, то кут між ними визначається в залежності вид виду рівнянь, якими задані прямі.

1. Прямі a_1 та a_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}.$$

Умова паралельності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Кут φ між прямими a_1 та a_2 визначається з формули

$$\cos\varphi=\frac{m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$m_1 m_2+m_2 n_2=0.$$

2. Прямі a_1 та a_2 задані загальними рівняннями

$$A_1 x+B_1 y+C_1=0 \text{ і } A_2 x+B_2 y+C_2=0.$$

Умова паралельності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

Кут φ між прямими a_1 та a_2 визначається з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1 A_2+B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$A_1 A_2 + B_2 B_2 = 0 .$$

3. Прямі a_1 та a_2 задані рівняннями із кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{і} \quad y = k_2 x + b_2 .$$

Умова паралельності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$k_1 = k_2 .$$

Гострий кут φ між прямими a_1 та a_2 визначається з формули

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| .$$

Умова перпендикулярності прямих a_1 та a_2 має вигляд

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} .$$

Для того, щоб знайти координати точок перетину ліній, що заданими своїми рівняннями, потрібно розв'язати систему з рівнянь цих ліній. Наприклад, якщо прямі a_1 та a_2 задані загальними рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 ,$$

то координати точки перетину прямих a_1 та a_2, якщо така точка існує, тобто прямі не паралельні, визначаються із системи:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 , \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 . \end{cases}$$

Метричними задачами називаються такі задачі, в яких йдеться про знаходження відстаней або величин, що пов'язані з розмірами фігур. Розв'язання багатьох таких задач базується на двох найпростіших формулах.

1. Відстань d між точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ знаходиться за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

2. Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Встановіть, які з наступних пар прямих паралельні, а які — ні:

1.1) $2x - 3y + 5 = 0$ і $-4x + 6y + 17 = 0$, 1.2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{5}$ і $\frac{x+5}{2} = \frac{y-11}{-3}$,

1.3) $y = 2x - 5$ і $y = 2x + 8$.

2. Знайдіть такі значення m, при яких вказані пари прямих будуть паралельними і перпендикулярними:

2.1) $4x - 5y + 10 = 0$ і $mx + 20y - 17 = 0$, 2.2) $y = 6x - 5$ і $y = mx + 3$.

3. Знайдіть кут між прямими та координати точки їхнього перетину:

$$3x - 4y + 14 = 0, \quad 5x + 12y - 70 = 0.$$

4. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5, -3)$ і точку перетину прямих $5x - 2y - 16 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K(2, -4)$ і розташована по відношенню до прямої $2x - y + 9 = 0$ 5.1) паралельно; 5.2) перпендикулярно.

6. Складіть рівняння прямої, яка утворює кут 45° з прямою $3x - y + 5 = 0$ і проходить через точку $L(6, 2)$.

7. Знайдіть відстань від точки $M(-1, 2)$ до прямої $8x - 15y + 4 = 0$.

8. Знайдіть відстань між прямими $3x - 4y + 12 = 0$ і $-6x + 8y + 17 = 0$.

9. Знайдіть висоту трикутника ABC, яка проведена з вершини C, якщо відомі координати вершин цього трикутника: $A(-4, 3), B(12, 15), C(-1, 5)$.

10. Знайдіть площу квадрата, однією з вершин якого є точка $A(-1, 3)$, а одна із сторін цього квадрата лежить на прямій $4x - 2y + 5 = 0$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Встановіть, які з наступних пар прямих паралельні, а які — ні:

1.1) $10x + y - 1 = 0$ і $20x - y + 11 = 0$, 1.2) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-3}$ і $\frac{x+1}{-8} = \frac{y-8}{6}$,

1.3) $y = 4x - 5$ і $y = -4x + 15$.

2. Знайдіть такі значення n, при яких вказані пари прямих будуть паралельними і перпендикулярними:

2.1) $3x+ny+10=0$ і $x-2y-5=0$, 2.2) $y=-4x+1$ і $y=nx-7$.

3. Знайдіть кут між прямими та координати точки їхнього перетину:

$$8x-6y-7=0, \quad 48x-14y-31=0.$$

4. Складіть рівняння прямої, яка проходить точку перетину прямих $2x+3y+9=0$, $x-2y-13=0$ і має кут нахилу 120°.

5. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(1,-2)$ і розташована по відношенню до прямої $3x-2y-5=0$ 5.1) паралельно; 5.2) перпендикулярно.

6. Складіть рівняння прямої, яка утворює кут 45° з прямою $6x+2y+1=0$ і проходить через точку $Q(-1,4)$.

7. Знайдіть відстань від точки $M(-2,1)$ до прямої $7x+24y+12=0$.

8. Знайдіть відстань між прямими $-5x+12y+20=0$ і $15x-36y+2=0$.

9. Знайдіть висоту трапеції $ABCD$ $(BC\|AD)$, якщо відомі координати трьох вершин цієї трапеції: $A(1,2), B(-9,4), C(-6,8)$.

10. Знайдіть площу ромба $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин:

$$A(4,6), B(1,2), C(5,5).$$

Тема 8. Рівняння площини

Теоретичні відомості

Рівнянням поверхні S відносно деякої прямокутної декартової системи координат називається рівняння $F(x,y,z)=0$, яке задовольняють координати тих і тільки тих точок, які лежать на цій поверхні.

В залежності від того, яким чином задана площина, можна тримати різні види рівнянь площини.

1. Рівняння площини, яка проходить через три точки

$$M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3),$$

що не лежать на одній прямій, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

2. Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і має заданий вектор нормалі $\vec{n}=(A, B, C)$, має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

3. Загальне рівняння площини:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

У загальному рівнянні рівнянні принаймні один із коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю: $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Ці коефіцієнти є координатами вектора нормалі площини: $\vec{n}=(A, B, C)$.

4. Рівняння площини у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Числа a, b, c є довжинами відрізків, що взяті з відповідними знаками, які площина відтинає на осях абсцис, ординат та аплікат відповідно.

Нехай площини α_1 та α_2 задані відповідно рівняннями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Умова паралельності площин α_1 і α_2 має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 знаходиться з формули

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності площин α_1 і α_2 має вигляд

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1, 2, 4)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(7, -2, 3)$. Приведіть отримане рівняння до загального виду.

2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $K(1, -2, 4)$, $L(2, -3, 5)$ та $M(5, 0, -3)$. Приведіть отримане рівняння до загального виду.

3. Знайдіть такі значення m, при яких площини

$$4x-3y+(m-3)z-10=0 \;\; \text{і} \;\; mx-6y+10z+17=0$$

будуть 3.1) паралельними, 3.2) перпендикулярними.

4. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2, -1, 4)$ і паралельна площині $5x-6y+3z-8=0$.

5. Знайдіть відстань від точки $L(3, -2, 1)$ до площини $2x-y+2z-5=0$.

6. Знайдіть координати точок, в яких площина $2x-3y+6z-24=0$ перетинає осі координат.

7. Знайдіть кут між площинами $2x+3y-6z-8=0$ і $x+4y+8z-26=0$.

8. Знайдіть об'єм тетраедра, який обмежений площиною $4x-y+8z-16=0$ та координатними площинами.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5, -1, 3)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(4, 1, -2)$. Приведіть отримане рівняння до загального виду.

2. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M(2, 0, -1)$, $L(3, 4, 8)$ та $P(-4, 1, 2)$. Приведіть отримане рівняння до загального виду.

3. Знайдіть такі значення n, при яких площини

$$-2x+ny+4z-5=0 \;\; \text{і} \;\; (n+5)x-3y-12z+19=0$$

будуть 3.1) паралельними, 3.2) перпендикулярними.

4. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $K_0(5, 2, -3)$ і паралельна площині $x+2y-4z-5=0$.

5. Знайдіть відстань від точки $Q(1, 0, -2)$ до площини $2x-6y+9z-12=0$.

6. Знайдіть координати точок, в яких площина $5x-y+2z+20=0$ перетинає осі координат.

7. Знайдіть кут між площинами $2x+y-2z+12=0$ і $3x+4y-12z+5=0$.

8. Знайдіть об’єм тетраедра, який обмежений площиною $5x-6y+10z-30=0$ та координатними площинами.

Розділ 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Тема 1. Поняття функції. Способи задання та найпростіші властивості функцій

Теоретичні відомості

Якщо кожному значенню x із деякої множини M ставиться у відповідність за заданим законом одне єдине число y, то кажуть, що на цій множині задана ***функція*** $y=y(x)$ або $y=f(x)$. Змінна x називається ***незалежною змінною*** або ***аргументом*** функції, змінну y називають ***залежною змінною.*** Множина M, про яку йдеться в означенні функції, називається ***областю задання*** функції. Множина всіх допустимих значень аргументу називається ***областю визначення*** функції і позначається $D(f)$. Множина всіх тих значень, які може набувати функція, називається ***областю значень*** функції і позначається $E(f)$.

Найбільш поширеними способами задання функції є аналітичний, графічний, табличний та описовий.

Найпростіші властивості функцій

1. Нулі функції та проміжки знакосталості. Точка c називається ***нулем*** функції, якщо $f(c)=0$. Для знаходження нулів функції потрібно розв’язати рівняння $f(x)=0$. Проміжки знакосталості — це проміжки, в усіх точках яких функція набуває тільки додатних чи тільки від’ємних значень.

2. Парність. Функція $y=f(x)$ називається ***парною (непарною),*** якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення аргументу $x\in D(f)$ виконується рівність $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$).

3. Періодичність. Функція $y=f(x)$ називається ***періодичною,*** якщо існує число $T=\neq 0$ таке, що для всіх значень $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+T)=f(x)$. Число T називається періодом функції f.

Якщо число T_0 є найменшим додатним періодом функції $f(x)$, то найменшим додатним періодом функції $y=f(\omega x)$, $\omega\neq 0$, є число $T=T_0/\omega$.

4. Монотонність. Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою (спадною)*** на інтервалі $(a,\,b)$, якщо для будь-яких двох чисел $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,\,b)$ таких, що $x_1<x_2$, має місце нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть область визначення функції.

1.1) $y=\frac{2x-1}{4x+12}$, 1.2) $y=\frac{\sin x}{x^2-3x+2}$, 1.3) $y=\sqrt{2x-20}+\frac{1}{x^2-14x+24}$,

1.4) $y=\ln(x-1)+4\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

2. Знайдіть область значень функції.

2.1) $y=2^x-3$, 2.2) $y=\sqrt{x^2+9}$, 2.3) $y=-x^2+4x-6$.

3. Знайдіть нулі функції та проміжки її знакосталості.

3.1) $y=x^3-4x^2+4x$, 3.2) $y=\frac{\lg(2x-5)}{x^2-13x+40}$.

4. Дослідіть функцію на парність.

4.1) $y=(x^2-4)\cos x$, 4.2) $y=\frac{x^3\arcsin x}{\operatorname{tg} x}$, 4.3) $y=e^{-x}+2$.

5. Знайдіть найменший додатний період функції.

5.1) $f(x)=2\cos 4x$, 5.2) $y=12\operatorname{tg} 3x$, 5.3) $y=\cos 2x+\sin 3x$.

6. Користуючись означенням, встановіть, що функція зростає на вказаному проміжку:

6.1) $y=x^2-6x+15$, $x\in[3, +\infty)$, 6.2) $y=x\cdot 2^{|x|}$, $x\in[0, +\infty)$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть область визначення функції.

1.1) $y=\frac{x^2-4}{5x+20}$, 1.2) $y=\frac{e^{2-x}}{2x^2-5x+2}$, 1.3) $y=\ln(10x+30)+\frac{4}{x^2-4x-12}$,

1.4) $y=\sqrt[4]{2x-3}\arccos\frac{4x-3}{5}$.

2. Знайдіть область значень функції.

2.1) $y=4|x|+2$, 2.2) $y=3\arcsin 2x-\pi$ 2.3) $y=x^2-8x+10$.

3. Знайдіть нулі функції та проміжки її знакосталості.

3.1) $y=\frac{(x-2)^2(x+1)^3}{x^2-1}$, 3.2) $y=\frac{2^{x-4}-8}{x^2-17x+30}$.

4. Дослідіть функцію на парність.

4.1) $y=(x^3-2x)\operatorname{arctg} x$, 4.2) $y=\sqrt{x^2-16}\cos 4x$, 4.3) $y=\dfrac{2}{x-3}$.

5. Знайдіть найменший додатний період функції.

5.1) $f(x)=3\sin 6x$, 5.2) $y=9\operatorname{ctg} 12x$, 5.3) $y=\cos 6x+\sin 5x$.

6. Користуючись означенням, встановіть, що функція спадає на вказаному проміжку:

6.1) $y=-x^2+12x-10$, $x\in[6,+\infty)$, 6.2) $y=\sqrt{8-4x}$, $x\in(-\infty,2]$.

Тема 2. Границя функції. Властивості границь. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Теоретичні відомості

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0.

Число a називається ***границею*** функції $y=f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$ має місце для всіх таких значень x, що задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ або $f(x)\to a$ при $x\to x_0$.

Властивості границь

1. Якщо функція має границю в деякій точці, то така границя єдина.

2. Якщо в точці x_0 мають границі функції $f(x)$ та $g(x)$, то в цій точці мають границі функції $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ та $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, і для будь-якого числа $k\in\mathbb{R}$ мають місце рівності

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x),\quad \lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x),\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} k=k,\quad \lim_{x\to x_0}(k f(x))=k\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Число b називається границею функції при $x\to+\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $M>0$ таке, що для всіх значень $x>M$ має місце нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ або $f(x)\to b$ при $x\to+\infty$.

Аналогічно означається границя при $x\to-\infty$. Якщо функція $y=f(x)$ має рівні границі при $x\to+\infty$ та при $x\to-\infty$, то такі границі позначаються коротко $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Символ $+\infty$ називається границею функції $y=f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх значень x, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, має місце нерівність $f(x)>M$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ або $f(x)\to+\infty$ при $x\to x_0$.

Аналогічно визначається граничне значення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Символ $+\infty$ називається границею функції при $x\to+\infty$, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує число $K>0$ таке, що для всіх значень $x>M$ має місце нерівність $f(x)>K$.

Позначення: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ або $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

Аналогічно означаються граничні значення $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Функція $y=f(x)$ називається ***нескінченно малою*** в точці x_0 (або при $x\to x_0$), якщо границя цієї функції в точці x_0 дорівнює нулю: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Функція називається ***нескінченно великою*** в точці x_0 (або при $x\to x_0$), якщо границя функції в цій точці дорівнює нескінченності будь-якого знаку: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Аналогічно визначаються нескінченно малі та нескінченно великі функції при $x\to\infty$.

Якщо функція $y=f(x)$ є нескінченно великою (малою) в точці x_0, то функція $y=\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою (великою) в точці x_0. Символічно це твердження записується у вигляді рівностей:

$$\frac{C}{\infty}=0, \quad \frac{C}{0}=\infty.$$

У цих рівностях C є довільним числом, за винятком нуля у другій із них. Невизначеностями є наступні вирази:

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[0^0\right],\ \left[1^\infty\right].$$

Завдання для авдиторної роботи

Знайдіть границі.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x^2-3x+1\right)$, 2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2\sin\frac{\pi x}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi x}{8}\right)$, 3. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{13-4x}+10\right)$,

4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+10x-56}{x^2-16}$, 5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2+x-18}{3x^2-x-10}$, 6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-5x-14}$,

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+7x+8}{9x^2+5}$, 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2-1}{24x^3+8x+5}$, 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^4+6x^2-5}{7x+1}$,

10. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{7x+1}-6}{x^2-25}$, 11. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+10x+9}{5-\sqrt{1-24x}}$, 12. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2+x-72}$,

13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{4-\sqrt{7x+9}}$, 14. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2-2x-35}{\sqrt[3]{6x+3}+3}$, 15. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-13x^2+36}{\sqrt{5x+6}-4}$.

Завдання для індивідуальної роботи

Знайдіть границі.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\left(5\cdot 2^x-3x^2+1\right)$, 2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\cos\frac{\pi x}{3}-\frac{8}{\pi}\operatorname{arcctg}x\right)$, 3. $\lim\limits_{x\to 7}\left(\sqrt[3]{x+1}-2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{7}\right)$,

4. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-2x-35}{x^2-49}$, 5. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{4x^2+5x-21}$, 6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2+5x-36}$,

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+5}{8x^4+x+1}$, 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+10}{12x^3+2x-5}$, 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^5+3x^2+1}{2x^3-7}$,

10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x^2-4}$, 11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+7x-30}{10-\sqrt{29x+13}}$, 12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+10x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x+6}-4}{8-\sqrt{31x+2}}$, 14. $\lim\limits_{x\to -7}\frac{\sqrt[3]{7x-15}+4}{x^2-3x-70}$, 15. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-10x^2+9}{\sqrt{1-24x}-5}$.

Тема 3. Чудові границі. Еквівалентності

Теоретичні відомості

Функція $\frac{\sin x}{x}$ має в точці $x=0$ границю, що дорівнює одиниці. Рівність

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

носить назву ***перша чудова границя.***

Функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ має границю при $x\to\infty$, що дорівнює числу e. Рівність

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

носить назву ***друга чудова границя.*** Має місце ще одна форма другої чудової границі:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e.$$

Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що є нескінченно малими в точці x_0, називаються ***еквівалентними нескінченно малими,*** якщо границя їхнього відношення в цій точці дорівнює одиниці:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1.$$

Позначення для еквівалентних нескінченно малих: $f_1(x)\sim f_2(x)$, $x\to x_0$.

При знаходженні границі відношення двох нескінченно малих функції можна будь-яку з них або обидві заміняти еквівалентною нескінченно малою. Значення границі при цьому не зміниться.

Справедливі наступні еквівалентності:

$$\sin t\sim t,\quad t\to 0, \qquad e^t-1\sim t,\quad t\to 0,$$

$$\arcsin t\sim t,\quad t\to 0, \qquad a^t-1\sim t\ln a,\quad t\to 0,$$

$$\operatorname{tg} t\sim t,\quad t\to 0, \qquad \ln(1+t)\sim t,\quad t\to 0,$$

$$\operatorname{arctg} t\sim t,\quad t\to 0, \qquad (1+t)^k-1\sim kt,\quad t\to 0,\quad (k>0),$$

$$1-\cos t\sim\frac{t^2}{2},\quad t\to 0, \qquad \sqrt{1+t}-1\sim\frac{1}{2}t,\quad t\to 0.$$

Завдання для авдиторної роботи

Знайдіть границі. В тих завданнях, де указано $x\to\pm\infty$, потрібно окремо розглянути границі при $x\to+\infty$ та $x\to-\infty$.

1\. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$, 2. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{8}{x^2-16}\right)$, 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-1}\right)^{x+2}$, 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{\frac{x^2}{2}}$,

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-1}{2x^2+5}\right)^{\frac{x+3}{2}}$, 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{4}}$, 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 4x}$, 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$,

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 8x}{1-\cos 4x}$, 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{arctg}6x}{(1-\cos 2x)\sin 3x}$, 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{4x}-1)x}{\operatorname{tg}2x\cdot\ln(1+8x)}$, 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)\sin 6x}{1-\cos 2x}$,

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+4\sin x}-1\right)\operatorname{tg}2x}{(e^{8x}-1)x}$, 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\arcsin x)^3-1}{\operatorname{arctg}x}$, 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}2x)-1}{x}$,

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)\operatorname{tg}^2 4x}{\arcsin^3 2x}$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$, 2. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{810}{x^2-25}\right)$, 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+3}{8x+1}\right)^{x-1}$, 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}\right)^{x^2+3}$,

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^2-3}{7x^2+3}\right)^{\frac{x-1}{2}}$, 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{12x-5}{12x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{2}}$, 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\operatorname{tg}6x}$, 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{x}$,

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{arctg}12x}{1-\cos 6x}$, 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin^2 4x}{\operatorname{tg}^2 3x\cdot\ln(1+6x)}$, 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5^x-1)\operatorname{arctg}2x}{x\sin 6x}$,

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 8x)(e^{4x}-1)}{x\arcsin 12x}$, 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+6\operatorname{tg}x}-1\right)\sin 2x}{\ln^2(1+4x)}$, 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^5-1}{\operatorname{arctg}25x}$,

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{x}$, 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)\operatorname{tg}^3 2x}{x^4\arcsin 2x}$.

Тема 4. Неперервність функції

Теоретичні відомості

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці $x=x_0$, якщо границя функції в цій точці існує і дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Властивості неперервних функцій

1. Нехай в околі точки x_0 визначені функції $f(x)$ та $g(x)$, неперервні в цій точці. Тоді неперервними у цій точці є функції

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)},$$

при цьому частка є неперервною при $g(x_0)\neq 0$.

2. Якщо функція $x=g(t)$ неперервна в точці t_0, а функція $y=f(x)$ неперервна у відповідній точці $x_0=g(t_0)$, то складна функція $y=f(g(t))$ неперервна у точці t_0.

Точки, у яких функція не є неперервною, називаються ***точками розриву*** функції.

Число A називається ***правою (лівою) границею*** функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх x, що задовольняють нерівність $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$, має місце нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. Праву та ліву границі функції $y=f(x)$ у точці x_0 позначають відповідно

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \text{ та } \lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ або } f(x_0+0) \text{ та } f(x_0-0).$$

Символ $+\infty$ називається ***правою (лівою) границею*** функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх x, що задовольняють нерівність $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$, має місце нерівність $f(x)>M$. Позначення відповідно

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty \text{ та } f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty.$$

Аналогічно визначаються і позначаються односторонні границі, що дорівнюють $-\infty$.

Класифікація точок розриву

1. Усувний розрив.

Точка x_0 називається ***точкою усувного розриву*** функції $f(x)$, якщо в цій точці функція має скінченну границю, але в точці x_0 функція $f(x)$ або не визначена, або її значення в цій точці не співпадає з границею: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x)$.

2. Розрив першого роду.

Точка x_0 називається ***точкою розриву першого роду*** функції $f(x)$, якщо в цій точці функція $f(x)$ має скінченні, але не рівні між собою односторонні границі: $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$.

3. Розрив другого роду.

Точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду*** функції $f(x)$, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має принаймні однієї з односторонніх границь або принаймні одна з односторонніх границь є нескінченною.

Завдання для авдиторної роботи

1. Дослідіть функцію на неперервність. Якщо функція має точки розриву, то встановіть їхній тип.

1.1. $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$. 1.2. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$. 1.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^4+9x^2}$. 1.4. $f(x)=\dfrac{1}{|x|-3}$.

1.5. $f(x)=\dfrac{1}{5^x-1}$. 1.6. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$.

2. Дослідіть функцію на неперервність. Якщо функція має точки розриву, то встановіть їхній тип. Побудуйте ескіз графіка функції.

2.1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-12}{x+2} & \text{при } x\neq -2, \\ 5 & \text{при } x=-2.\end{cases}$ 2.2. $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{при } x\leqslant 0, \\ x^2 & \text{при } 0<x\leqslant 3, \\ 5-2x & \text{при } x>3.\end{cases}$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Дослідіть функцію на неперервність. Якщо функція має точки розриву, то встановіть їхній тип.

1.1. $f(x)=\dfrac{2x-7}{x+8}$. 1.2. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-25}$. 1.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^6+16x^4}$. 1.4. $f(x)=\dfrac{1}{2|x|-10}$.

1.5. $f(x)=\dfrac{1}{2^x-8}$. 1.6. $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{1/x^2}}$.

2. Дослідіть функцію на неперервність. Якщо функція має точки розриву, то встановіть їхній тип. Побудуйте ескіз графіка функції.

2.1. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-20}{x-4} & \text{при } x\neq 4, \\ 2 & \text{при } x=4.\end{cases}$ 2.2. $f(x)=\begin{cases}x^2-x-2 & \text{при } x\leqslant 4, \\ \sqrt{x}-2 & \text{при } 4<x\leqslant 9, \\ 4-x & \text{при } x>9.\end{cases}$

Тема 5. Похідна функції в точці. Правила диференціювання

Теоретичні відомості

Нехай функкія $f(x)$ визначена в околі деякої точки x. Якщо аргументу функції надати в точці x приросту Δx так, щоб значення $x+\Delta x$ теж належало цьому околу, то величина

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$$

називається ***приростом функції*** $y=f(x)$ в точці x, що відповідає приросту аргументу Δx.

При умові, що $\Delta x\neq 0$, в даній фіксованій точці x розглядається ***різницеве відношення:***

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя при $\Delta x\to 0$ різницевого відношення при умові, що ця границя існує. Похідну функції $y=f(x)$ позначають $f'(x)$ або $y'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Іноді для того, щоб підкреслити той факт, що похідна функції $y=f(x)$ береться по змінній x, використовується позначення y'_x або f'_x.

Фізичний зміст похідної. Якщо функція $s=f(t)$ описує закон руху тіла або матеріальної точки (тобто залежність пройденого шляху s від часу t), то похідна $s'(t)$ визначає миттєву швидкість руху цього тіла або матеріальної точки: $v(t)=s'(t)$.

Геометричний зміст похідної. Похідна $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$.

Правила диференціювання

1. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні в точці x, то сума, різниця, добуток та частка цих функцій диференційовні в цій точці (частка при умові $v(x)\neq 0$), при цьому мають місце формули:

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x),$$

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

2. Нехай функція $u=\varphi(x)$ диференційовна в деякій точці x_0, а функція $y=f(u)$ диференційовна у відповідній точці $u_0=\varphi(x_0)$. Тоді складна функція $y=f(\varphi(x))$ диференційовна в точці x_0 і справедлива формула:

$$y'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $C'=0$.

2. $(x^n)'=nx^{n-1},\ n\in\mathbb{R}$. 2.1. $x'=1$. 2.2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 2.3. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a > 0,\ a \neq 0)$. 3.1. $(e^x)' = e^x$.

4. $\sin' x = \cos x$. 5. $\cos' x = -\sin x$. 6. $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 7. $\operatorname{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 9. $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 10. $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. 11. $\operatorname{arcctg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 0)$. 12.1. $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть похідну функції.

1.1. $y = 4x^{10} - 5x + 2e^x - 1$. 1.2. $y = \dfrac{6}{x^4} - 14\sqrt[7]{x^2} + 2\operatorname{tg} x - 3$. 1.3. $y = 5\ln x - 3\arcsin x - \dfrac{2}{x} + 6$.

1.4. $y = (x^2 + 4x - 1)(2x + 5)$. 1.5. $y = 4x\sqrt[3]{x}$. 1.6. $y = (2 + x)(4 - \sqrt[6]{x})$.

1.7. $y = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x^6}$. 1.8. $y = \dfrac{4 \cdot 5^x + 5 \cdot 2^x}{2^x}$.

1.9. $y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x$. 1.10. $y = \cos x \cdot \ln x$. 1.11. $y = 2^x \cdot \sqrt{x}$.

1.12. $y = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 1}$. 1.13. $y = \dfrac{\sin x}{x + 2}$. 1.14. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

1.15. $y = 5\cos 6x$. 1.16. $y = (8 - 5x)^{10}$. 1.17. $y = \sqrt{4x^2 - x + 2}$. 1.18. $y = e^{12x^3 - 5x + 1}$.

1.19. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$. 1.20. $y = \ln^2 \cos x$. 1.21. $y = \dfrac{4}{(9x^2 + x + 5)^3}$. 1.22. $y = \operatorname{tg}\sqrt{\pi x + 4}$.

2. Тіло здійснює прямолінійний рух за законом $s(t) = 4t^2 + 8t + 5$, де s – шлях, який пройшло тіло, м; t – час руху, с. Знайдіть швидкість руху тіла через 2 с після початку руху та середню швидкість, з якою рухалося тіло з другої по п'яту секунди.

3. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = \dfrac{12}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, де x – абсциса точки, м; t – час руху, с. Знайдіть швидкість руху точки через 24 с після початку руху. В які моменти часу швидкість руху точки є найбільшою?

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть похідну функції.

1.1. $y=-10x^4+8x^2-2\sqrt{x}+5$. 1.2. $y=\dfrac{8}{x^5}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}+4\,\mathrm{ctg}\,x-1$. 1.3. $y=6\,\mathrm{arctg}\,x-5e^x+8\ln x+7$.

1.4. $y=(x^3+2x+1)(4x-5)$. 1.5. $y=8x^2\sqrt{x}$. 1.6. $y=(8-x)(\sqrt[5]{x}+4)$.

1.7. $y=\dfrac{4x^3-5x+1}{x^5}$. 1.8. $y=\dfrac{4\cos x-3\sin x}{\cos x}$.

1.9. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. 1.10. $y=\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x$. 1.11. $y=\arccos x\cdot\ln x$.

1.12. $y=\dfrac{12x^2-x-1}{12x^2-x+1}$. 1.13. $y=\dfrac{e^x}{x^2+4}$. 1.14. $y=\dfrac{\ln x-2}{\ln x+2}$.

1.15. $y=8\sin 9x$. 1.16. $y=(10-3x)^{20}$. 1.17. $y=\lg(6x^2-2x+1)$. 1.18. $y=4^{3x^4+9x-1}$.

1.19. $y=\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$. 1.20. $y=\mathrm{tg}^3(8x-1)$. 1.21. $y=\dfrac{10}{(x^2+x+1)^5}$. 1.22. $y=e^{\sqrt{4x^2+1}}$.

2. Висота тіла, яке кинули вертикально вгору, змінюється за законом $h=8+40t-2t^2$, де h – висота, м; t – час, с. Знайдіть швидкість руху тіла через 3 с після початку руху та найбільшу висоту, на яку воно підніметься.

3. При гальмуванні кут повороту маховика змінюється за законом $\varphi=5+90t-5t^2$, де φ – кут повороту, рад; t – час, с. Знайдіть величину кутової швидкості через 5 с після початку гальмування та момент часу, коли обертання припиниться.

Тема 6. Логарифмічне диференціювання. Похідна параметрично та неявно заданої функції.

Теоретичні відомості

Функція виду $y=u(x)^{v(x)}$ називається ***показниково-степеневою.*** Для знаходження її похідної використовується ***логарифмічне диференціювання:*** диференціюється не сама функція, а її логарифм. Обидві частини рівності $y=u(x)^{v(x)}$ спочатку логарифмуються:

$$\ln y=v(x)\ln u(x).$$

В рівності, що утворилася, обидві частини диференціюються. Похідна від функції $v(x)\ln u(x)$ береться за правилами диференціювання добутку та складної функції. Похідна від функції $\ln y$ називається ***логарифмічною похідною*** функції y і визначається за правилом диференціювання складної функції:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

За відомою логарифмічною похідною функції y знаходиться просто похідна y' цієї функції.

Якщо функцію $y=f(x)$ задано параметрично: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то її похідна визначається за формулою (при умові, що $\varphi'(t)\neq 0$ в деякій області):

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Якщо диференційовна функція $y(x)$ задана неявно, тобто задовольняє рівняння

$$F(x,y)=0,$$

то похідну $y'(x)$ цієї неявно заданої функції можна знайти, диференціюючи обидві частини попередньої рівності, тобто з рівняння

$$(F(x,y))'_x=0.$$

При цьому функція $F(x,y)$ розглядається як складна функція аргументу x.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть похідну функції, користуючись методом логарифмічного диференціювання:

1.1. $y=x^{\cos x}$. 1.2. $y=(x^2+1)^{\sqrt{x}}$. 1.3. $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x^2+3}$.

2. Знайдіть похідну y'_x функції, що задана параметрично:

2.1. $x=5t^6+1$, $y=2\sin t-3\cos t$, 2.2. $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$.

2.3. $x=2\sqrt{t}+e^t$, $y=4t^2+6t-1$. 2.4. $x=t\arcsin t$, $y=\sqrt{1-t^2}$.

3. Знайдіть похідну y'_x функції, що задана неявно:

3.1. $x^4+y^4-2xy=0$. 3.2. $3x^4y^2-5x\ln y+9e^{2x}\cos 4y=0$. 3.3. $\sqrt{x^2+y^2}\arcsin x-4=0$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть похідну функції, користуючись методом логарифмічного диференціювання:

1.1. $y=x^{\operatorname{tg} x}$. 1.2. $y=(x^2+4)^{x^8-1}$. 1.3. $y=\left(\frac{\sin x}{1+x}\right)^{x^2}$.

2. Знайдіть похідну y'_x функції, що задана параметрично:

2.1. $x=4t^3+1$, $y=8t^2+5t-1$. 2.2. $x=t\cos t$, $y=t\sin t$.

2.3. $x=\sqrt[3]{t}+3\ln t$, $y=2t^2+1$. 2.4. $x=(t^2+1)^4$, $y=e^t\cos t$.

3. Знайдіть похідну y'_x функції, що задана неявно:

3.1. $x^5+4y^5-2xy=0$. 3.2. $9x^2y^3-15\sqrt{x}\sin y+2\arcsin x\cdot\mathrm{ctg}\,y=0$. 3.3. $e^{x^2-4y^2}\sqrt{1+x^2}-5=0$.

Тема 7. Диференціал функції. Похідні вищих порядків.

Теоретичні відомості

Функція $y=f(x)$ називається диференційовною в точці x, якщо приріст Δy цієї функції в точці x, що відповідає приросту аргументу Δx, може бути представлений у вигляді

$$\Delta y=A\,\Delta x+\alpha\,\Delta x, \qquad (5)$$

де $A=\mathrm{const}$ – деяке число, що не залежить від Δx, а α – функція аргументу Δx, що є нескінченно малою при $\Delta x\to 0$.

Для того, щоб функція $y=f(x)$ була диференційовною в точці x, необхідно і достатньо, щоб у цій точці функція мала скінченну похідну. При цьому число A у формулі (5) дорівнює значенню похідної функції у заданій точці: $A=f'(x)$.

При $A\neq 0$ диференціалом функції $y=f(x)$ в даній точці x, що відповідає приросту аргументу Δx, називається головна лінійна відносно Δx частина приросту цієї функції в точці x. Якщо для приросту функції має місце представлення (5), то диференціал дорівнює

$$dy=A\,\Delta x.$$

При $A=0$ за означенням диференціал визначається цією ж формулою. Диференціал аргументу за означенням приймається рівним приросту аргументу: $dx=\Delta x$, і отже, формула для знаходження диференціала має вигляд

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Звідси також випливає, що похідна функції в точці дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала аргументу в цій точці: $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну на деякому інтервалі, то ця похідна також представляє собою деяку функцію $y=f'(x)$, що визначена на цьому ж інтервалі. Якщо в деякій точці x цього інтервалу функція $f'(x)$ диференційовна, то похідна функції $f'(x)$ називається другою похідною функції $y=f(x)$ в точці x або похідною другого порядку:

$$f''(x)=(f'(x))'.$$

Аналогічно третя похідна (похідна третього порядку) — це похідна від другої похідної. Взагалі $n-$ю похідною (похідною $n-$го порядку) називається похідна від $(n-1)-$ї похідної:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Фізичний зміст другої похідної. Якщо функція $s=f(t)$ описує закон прямолінійного руху, то друга похідна від шляху s по часу t є прискоренням руху: $a(t)=s''(t)$.

Якщо функцію задано параметрично: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то для знаходження другої похідної її представляють у вигляді

$$y''_{xx}=\frac{d\left(y'_x\right)}{dx}$$

і використовують правило диференціювання частки, якою представлена перша похідна

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

та рівність $dx=\varphi'(t)\,dt$.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть вираз для диференціала функції у довільній точці x при довільному значенні диференціала аргументу dx.

1.1. $y=2x^4+5e^x-1$. 1.2. $y=e^x\operatorname{tg}x$. 1.3. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$. 1.4. $y=\sin^2(6x-1)$.

2. Для заданої функції обчисліть диференціал та приріст в заданій точці x_0 при заданому значенні приросту аргументу Δx. Порівняйте знайдені значення приросту та диференціала.

$$f(x)=2x^3+5x-1,\ \ x_0=2,\ \ \Delta x=0{,}01.$$

3. Знайдіть похідні вказаних порядків для функцій:

3.1. $y=x^5+3x^4-2\cos x+4e^{2x}-3$, $y'''-?$ 3.2. $y=\ln(2x+5)$, $y''-?$

3.3. $y=2\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{x^2}$, $y''-?$ 3.4. $y=\dfrac{x-2}{x+2}$, $y''-?$

3.5. $y=x\operatorname{arctg}x$, $y''-?$ 3.6. $y=\sin^2 3x$, $y''-?$

4. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом

$$x=\frac{t^4}{4}-7t^3+60t^2+24t+15,$$

де x – координата точки, м; t – час, с. Знайдіть прискорення точки через 2 с після початку руху та моменти часу, в які прискорення руху було рівним нулю.

5. Знайдіть другу похідну y''_{xx} функції, що задана параметрично:

$$x=2t+e^t,\ \ y=3t^2+4t.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть вираз для диференціала функції у довільній точці x при довільному значенні диференціала аргументу dx.

1.1. $y=\operatorname{arctg}x+4x^3-8\ln x+2$. 1.2. $y=\sin x\cdot\arcsin x$. 1.3. $y=\dfrac{e^x-2}{e^x+2}$. 1.4. $y=\operatorname{tg}^3(4x+1)$.

2. Для заданої функції обчисліть диференціал та приріст в заданій точці x_0 при заданому значенні приросту аргументу Δx. Порівняйте знайдені значення приросту та диференціала.

$$f(x)=x^4-3x^2+1,\ \ x_0=-2,\ \ \Delta x=0{,}03.$$

3. Знайдіть похідні вказаних порядків для функцій:

3.1. $y=x^{10}+6x^5-5\sin 2x+8e^x-2$, $y'''-?$ 3.2. $y=\ln(6x^2-2x+1)$, $y''-?$

3.3. $y=\dfrac{5}{x^{10}}-6\sqrt[4]{x^3}$, $y''-?$ 3.4. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$, $y''-?$

3.5. $y=(2x+1)\arcsin x$, $y''-?$ 3.6. $y=\cos^2\pi x$, $y''-?$

4. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом

$$x=\frac{t^4}{4}-10^3+144t^2+60t+18,$$

де x – координата точки, м; t – час, с. Знайдіть прискорення точки через 4 с після початку руху та моменти часу, в які прискорення руху було рівним нулю.

5. Знайдіть другу похідну y''_{xx} функції, що задана параметрично:

$$x=4t^2+\ln t,\ y=8t^4+1.$$

Тема 8. Застосування диференціала до наближених обчислень. Геометричний зміст похідної.

Теоретичні відомості

При невеликих значення приросту аргументу в деякій точці приріст функції приблизно дорівнює її диференціалу: $\Delta y\approx dy$. Тому при невеликих Δx має місце наближена рівність:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$ має вигляд

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Нормаллю до кривої в точці називається пряма, перпендикулярна до дотичної, що проведена до графіка функції в цій точці. Якщо в точці x_0 функція $y=f(x)$ має відмінну від нуля похідну, то рівняння нормалі до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$ має вигляд

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Обчисліть наближено за допомогою диференціала значення функції в указаній точці.

1.1. $y=\sqrt{5x^2+8x+3}$, $x=1{,}002$. 1.2. $y=\sqrt{\dfrac{x-3}{2x+1}}$, $x=4{,}012$. 1.3. $y=e^{\sqrt{x}+2}$, $x=3{,}98$.

2. Обчисліть наближено за допомогою диференціала та порівняйте зі значенням, що одержується за допомогою обчислювальної техніки.

2.1. $1{,}02^{10}$. 2.2. $\sqrt[3]{7{,}96}$. 2.3. $\sin 10'$. 2.4. $\mathrm{arctg}\,1{,}04$.

3. Складіть рівняння дотичної та нормалі до графіка заданої функції в указаній точці x_0.

3.1. $y=2x^4+3x^2-1$, $x_0=2$. 3.2. $y=\operatorname{tg} x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

4. Знайдіть точки, в яких дотичні до графіка функції $y=x^3+x^2+x+5$ паралельні прямій $y=2x-1$.

5. До графіка функції $y=\frac{2x-1}{x+1}$ проведено дотичну в точці з абсцисою $x_1=-2$ та нормаль у точці з абсцисою $x_2=2$. Знайдіть кут між цими прямими.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Обчисліть наближено за допомогою диференціала значення функції в указаній точці.

1.1. $y=\sqrt[3]{x^2+3x-2}$, $x=1$. 1.2. $y=x\ln(x+2)$, $x=-0{,}94$. 1.3. $y=\sin 2x$, $x=0{,}005$.

2. Обчисліть наближено за допомогою диференціала та порівняйте зі значенням, що одержується за допомогою обчислювальної техніки.

2.1. $2{,}032^4$. 2.2. $\sqrt[6]{64{,}02}$. 2.3. $e^{0{,}02}$. 2.4. $\arcsin 0{,}03$.

3. Складіть рівняння дотичної та нормалі до графіка заданої функції в указаній точці x_0.

3.1. $y=2x^3+6x-1$. $x_0=-1$. 3.2. $y=\arcsin x$, $x_0=\frac{1}{2}$.

4. Знайдіть точки, в яких дотичні до графіка функції $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+3$ паралельні прямій $y=5x-2$.

5. До графіка функції $y=\frac{x^2+1}{x-2}$ проведено дотичну в точці з абсцисою $x_1=1$ та нормаль у точці з абсцисою $x_2=0$ Знайдіть кут між цими прямими.

Тема 9. Монотонність та екстремуми. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Теоретичні відомості

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою (спадною)*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких двох значень $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,b)$ із того, що $x_1<x_2$ випливає, що

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Функція $y=f(x)$ називається ***незростаючою (неспадною)*** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких двох значень $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,b)$ із того, що $x_1<x_2$ випливає, що

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\ \ (f(x_1)\leqslant f(x_2)).$$

Якщо на деякому інтервалі похідна функції невід'ємна (недодатна), то на цьому інтервалі функція є неспадною (незростаючою). Якщо на деякому інтервалі похідна функції додатна (від'ємна), то на цьому інтервалі функція є зростаючою (спадною).

Точка c називається ***точкою максимуму (мінімуму)*** функції $y=f(x)$, якщо існує такий окіл точки c, що для всіх точок $x\neq c$ із цього околу має місце нерівність

$$f(c)>f(x)\ \ (f(c)<f(x)).$$

Точки максимум та точки мінімуму мають загальну назву: ***точки екстремуму.***

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ є диференційовною в точці c і має в цій точці екстремум, то $f'(c)=0$.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції. Диференційовна функція може мати екстремуми лише в стаціонарних точках.

Достатня умова екстремуму. Нехай c – стаціонарна точка функції $f(x)$, і нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому околі точки c. Тоді, якщо похідна $f'(x)$ додатна (від'ємна) для всіх значень $x<c$ з цього околу і від'ємна (додатна) для всіх значень $x>c$ з цього околу, то функція $f(x)$ має в точці c максимум (мінімум). Якщо похідна має один і той же знак і при всіх значеннях $x<c$, і при всіх значеннях $x>c$ з цього околу, то екстремуму в точці c функція $f(x)$ не має.

Функція, що є неперервною на відрізку, досягає на ньому своїх найбільшого та найменшого значень. При цьому ці значення можуть досягатися або на кінцях відрізка, або у внутрішніх його точках, що є точками екстремуму функції. Тому щоб знайти найбільше та найменше значення функції, яка неперервна на відрізку і диференційовна у внутрішніх точках цього відрізка, потрібно знайти стаціонарні точки функції, які належать відрізку, обчислити значення функції в цих точках та на кінцях відрізка і серед знайдених значень обрати найбільше та найменше.

Завдання для авдиторної роботи

1. Доведіть, що функція зростає на всій області визначення.

1.1. $f(x)=4x^3+x^2+x+8$. 1.2. $f(x)=2\sin x+6x-1$.

2. Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремумів функції.

2.1. $f(x)=x^3-18x^2+96x-3$. 2.2. $f(x)=\sqrt{9x^2-3x+1}$. 2.3. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$.

2.4. $f(x)=e^{2x}-2x+3$. 2.5. $f(x)=x\ln x$. 2.6. $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$.

3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку.

3.1. $f(x)=\frac{4}{3}x^3-36x+5,\ [0,\ 6]$. 3.2. $f(x)=\frac{x^5}{5}-x+2,\ [-4,\ 2]$.

3.3. $f(x)=(2x-1)e^{3x+1},\ [0,\ 1]$. 3.4. $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1},\ [-3,\ 2]$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Доведіть, що функція спадає на всій області визначення.

1.1. $f(x)=\frac{1}{x}-2x^4-6\sqrt{x}$. 1.2. $f(x)=1-\frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x+2)$.

2. Знайдіть проміжки монотонності та точки екстремумів функції.

2.1. $f(x)=x^3+6x^2-36x-15$. 2.2. $f(x)=e^{x^2-8x+15}$. 2.3. $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

2.4. $f(x)=x(\ln^2 x+1)-2$. 2.5. $f(x)=x-\frac{1}{x}$. 2.6. $f(x)=x+\sqrt{4-x}$.

3. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на вказаному відрізку.

3.1. $f(x)=\frac{x^3}{3}-16x+2,\ [0,\ 6]$. 3.2. $f(x)=\frac{x^7}{7}-x+4,\ [-2,\ 2]$.

3.3. $f(x)=\ln(1+x^2),\ [-1,\ 2]$. 3.4. $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}},\ \left[\frac{1}{4},\ 1\right]$.

Тема 10. Опуклість та точки перегину

Теоретичні відомості

Функція $y=f(x)$ називається опуклою донизу (догори) на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких двох різних точок $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,b)$ і для будь-якого числа $\alpha\in(0,\ 1)$ має місце нерівність

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\ \ (f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)).$$

Геометричний зміст цих нерівностей наступний. Нехай обрано два довільних різних значення $x_1\in(a,b)$, $x_2\in(a,b)$. Побудуємо відрізок з кінцями в точках $(x_1,f(x_1))$ та $(x_2,f(x_2))$. Якщо функція опукла донизу (догори) на інтервалі (a,b), то частина графіка функції, яка стягується цим відрізком, розташована не вище (не нижче) цього відрізка. На рис. 16 зображено графік функції, яка опукла донизу, а на рис. 17 — графік функції, що опукла догори.

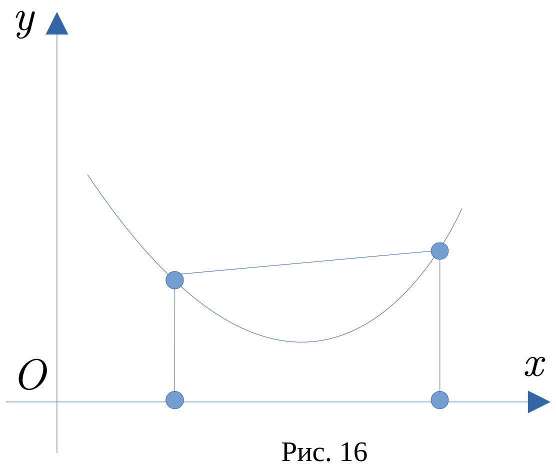


Рис. 16

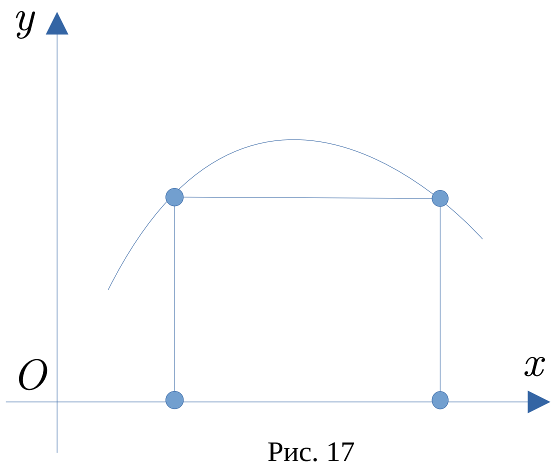


Рис. 17

Достатня умова опуклості. Якщо на деякому інтервалі друга похідна функції додатна (від'ємна), то на цьому інтервалі функція опукла донизу (догори).

Точка $(c, f(c))$ графіка функції $y=f(x)$ називається ***точкою перегину,*** якщо існує такий окіл точки c, у якому зліва і справа від точки c графік функції $y=f(x)$ має різні напрямки опуклості.

Необхідна умова перегину. Якщо функція $y=f(x)$ має в точці c другу похідну і точка $(c, f(c))$ є точкою перегину цієї функції, то $f''(c)=0$.

Достатня умова перегину. Нехай функція $y=f(x)$ має другу похідну в деякому околі точки c і $f''(c)=0$. Якщо друга похідна $f''(x)$ має різні знаки зліва і справа від точки c, то графік цієї функції має перегин в точці $(c, f(c))$.

Завдання для авдиторної роботи

Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції

1.1. $y=x^3-18x^2+24x-1$. 1.2. $y=x^4-12x^3+48x^2+12x-60$. 1.3. $y=x^4-54x^2+10$.

1.4. $y=x+\dfrac{2}{x}$. 1.5. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. 1.6. $y=e^{4x}-16e^x+5$. 1.7. $y=x^4\ln x$.

Завдання для індивідуальної роботи

Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції

1.1. $y=2x^3-36x^2+9x-3$. 1.2. $y=x^4+4x^3-144x^2+84x+12$. 1.3. $y=x^6-5x^3-2$.

1.4. $y=x^2-\dfrac{8}{x}$. 1.5. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. 1.6. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$. 1.7. $y=e^{-x^2}$.

Тема 11. Асимптоти графіка функції. Схема дослідження функцій та побудова графіків

Теоретичні відомості

Пряма m називається ***асимптотою*** кривої L, якщо відстань від точки $M \in L$ до прямої m прямує до нуля за умови, що точка M віддаляється по кривій L у нескінченність.

Для кривих, що є графіками функцій, розрізняють горизонтальні та похилі асимптоти. ***Вертикальною асимптотою*** графіка функції називається така асимптота, яка розташована паралельно осі ординат. ***Похила асимптота*** — це асимптота, що не є вертикальною. Рівняння вертикальних асимптот шукають у вигляді $x = a$, де a – деяке число. Рівняння похилих асимптот графіків функцій шукають у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де k та b – деякі числа.

Пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли принаймні одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли існують і є скінченними границі

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{і} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b .$$

Такі ж формули мають місце і при знаходженні похилих асимптот при $x \to -\infty$.

Схема дослідження функції для побудови графіка

1. Знайти область визначення функції.

2. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.

3. Дослідити функцію на неперервність та знайти її точки розривів.

4. Дослідити функцію на парність.

5. Дослідити функцію на періодичність.

6. Знайти нулі функції та проміжки знакосталості.

7. Знайти асимптоти графіка функції.

8. Дослідити функцію на монотонність та знайти її точки екстремумів.

9. Дослідити функцію на опуклість та знайти її точки перегину.

10. Виконати побудову графіка.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть асимптоти графіка функції.

1.1. $y=\frac{2x^3-1}{x^2-4x-12}$. 1.2. $y=\frac{x^2+3}{x+1}$.

2. Проведіть повне дослідження функції та побудуйте її графік.

2.1. $y=x^4-8x^2+12$. 2.2. $y=x^3+x-2$. 2.3. $y=\frac{x^2}{x^2-4}$. 2.4. $y=\frac{1}{x^2+x+1}$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть асимптоти графіка функції.

1.1. $y=\frac{4x^3+5}{x^2-4x+3}$. 1.2. $y=\frac{x^2+5x+1}{x-2}$.

2. Проведіть повне дослідження функції та побудуйте її графік.

2.1. $y=x^4-18x^2-5$. 2.2. $y=x^3-3x-2$. 2.3. $y=\frac{(x-1)^2}{x-3}$. 2.4. $y=\frac{1}{x^2-x-6}$.

Розділ 4. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Тема 1. Первісна і невизначений інтеграл. Метод безпосереднього інтегрування

Теоретичні відомості

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), якщо в усіх точках $x\in(a,b)$ функція $F(x)$ є диференційовною і має місце рівність

$$F'(x)=f(x),\ x\in(a,b).$$

Якщо $F(x)$ – одна із первісних для функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), то будь-яка інша первісна $\Phi(x)$ для функції $f(x)$ на цьому інтервалі має вигляд $\Phi(x)=F(x)+C$, де C – деяка стала.

Сукупність усіх первісних для даної функції на інтервалі (a,b) називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на цьому інтервалі і позначається символом $\int f(x)dx$.

Якщо $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$ на деякому інтервалі, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

де C – довільна стала.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$. 2. $\int f'(x)dx=f(x)+C$. 3. $\int df(x)=f(x)+C$.

4. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$. 5. $\int (f(x)+g(x))\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.

6. $\int kf(x)\,fx=k\int f(x)\,dx,\ k\in\mathbb{R}$.

7. Якщо $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, то для будь-якого $k\neq 0$ має місце рівність

$$\int f(kx+b)\,dx=\frac{1}{k}F(kx+b)=C.$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0\,dx=C$. 3. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ \ n\neq -1$. 3.1. $\int dx=x+C$. 3.2. $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$.

3.3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$. 4. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$. 5. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\ (a>0,\ a\neq 1)$.

5.1. $\int e^x\,dx=e^x+C$. 6. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$. 7. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

8. $\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$. 9. $\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$. 10. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.

11. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$. 12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$. 13. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a}\right|+C$. 15. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

У формулах 12-15 через a позначено довільне додатне число.

Метод безпосереднього інтегрування полягає в тому, що невизначений інтеграл береться одразу за таблицею, або ж за допомогою різних перетворень підінтегральна функція зводиться до табличної або ж до такої, що є сумою декількох функції, інтеграл від кожної з яких є табличним.

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть невизначені інтеграли.

1.1. $\int(2x^5-6x+5e^{10x}-7)\,dx$. 1.2. $\int(4x-1)(2x^2+3)\,dx$. 1.3. $\int\left(5\sqrt[4]{x^3}-\frac{3}{x^{10}}\right)dx$.

1.4. $\int e^x(2+e^{-3x})\,dx$. 1.5. $\int\frac{8x^2+5}{x^3}\,dx$. 1.6. $\int\cos 8x\cos 15x\,dx$. 1.7. $\int\sin^2 6x\,dx$.

1.8. $\int\frac{x}{x+4}\,dx$. 1.9. $\int\frac{x^2}{x^2-4}\,dx$. 1.10. $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{9}{x^2+81}\right)dx$. 1.11. $\int\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

1.12. $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$. 1.13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

2. Знайдіть таку первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, графік якої проходить через точку A.

2.1. $f(x)=4x^3+6x-1$, $A(0,7)$. 2.2. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}+6\sin 2x+\frac{8}{\cos^2 4x}+5e^x$, $A(0,7)$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть невизначені інтеграли.

1.1. $\int (12x^{11}-8x^5+3\cos 6x-5)\,dx$. 1.2. $\int (x^2+2)(3x+5)\,dx$. 1.3. $\int \left(6\sqrt[5]{x^2}-\frac{7}{x^8}\right)dx$.

1.4. $\int e^{2x}(4+e^{-2x})\,dx$. 1.5. $\int \frac{6x-1}{\sqrt{x}}dx$. 1.6. $\int \sin 12x\cos 4x\,dx$. 1.7. $\int \cos^2 12x\,dx$.

1.8. $\int \frac{x^2}{x^2+16}dx$. 1.9. $\int \frac{x}{x-7}dx$. 1.10. $\int \left(\frac{4}{x^2-144}+\frac{13}{\sqrt{100-x^2}}\right)dx$.

1.11. $\int \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$. 1.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$. 1.13. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$.

2. Знайдіть таку первісну $F(x)$ для функції $f(x)$, графік якої проходить через точку A.

2.1. $f(x)=48x^3+\frac{8}{x}-3$, $A(1,4)$. 2.2. $f(x)=-6\sin 3x+8\cos 2x-20e^{4x}-\frac{35}{\cos^2 5x}$, $A(0,-3)$.

Тема 2. Метод інтегрування частинами

Теоретичні відомості

Якщо на інтервалі (a,b) кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ має неперервну похідну, то на цьому інтервалі має місце формула інтегрування частинами:

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,dx.$$

Цю формулу використовують у символічній формі:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Деякі типи інтегралів, що беруться частинами

1. $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $\int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$.

Тут $P_n(x)$ є алгебраїчним многочленом степеня n, а $\alpha \neq 0$ – довільне число. В інтегралах цього типу приймають $u = P_n(x)$, а через dv позначають частину підінтегрального виразу, що при цьому залишається: $dv = e^{\alpha x} dx$, $dv = \cos \alpha x\, dx$, $dv = \sin \alpha x\, dx$ відповідно. Інтегрування частинами до таких інтегралів застосовується n разів підряд.

2. $\int f(x) P_n(x)\, dx$.

Тут $P_n(x)$ є алгебраїчним многочленом степеня n, а $f(x)$ є однією із функцій

$\arcsin kx$, $\arccos kx$, $\operatorname{arctg} kx$ або $\operatorname{arcctg} kx$, $k \neq 0$ – довільне число.

В інтегралах такого типу покладають $u = f(x)$, $dv = P_n(x)\, dx$.

3. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx$, $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

В інтегралах такого типу покладають $u = \cos \beta x$ або $u = \sin \beta x$ відповідно і $dv = e^{\alpha x} dx$. Формула інтегрування частинами застосовується двічі підряд, що призводить до лінійного рівняння відносно невідомого інтеграла.

Завдання для авдиторної роботи

Користуючись методом інтегрування частинами, знайдіть інтеграли.

1. $\int (2x-1) \cos x\, dx$. 2. $\int x^2 e^{2x} dx$. 3. $\int x \sin^2 x\, dx$. 4. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. 5. $\int x^3 \ln x\, dx$.

6. $\int e^x \cos x\, dx$. 7. $\int e^{2x} \sin 4x\, dx$. 8. $\cos \ln x\, dx$. 9. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$.

Завдання для індивідуальної роботи

Користуючись методом інтегрування частинами, знайдіть інтеграли.

1. $\int (4x+5) \sin x\, dx$. 2. $\int (x^2+3x-1) \cos 4x\, dx$. 3. $\int x \cos^2 3x\, dx$. 4. $\int x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$.

5. $\int (x^2-x+1) \ln x\, dx$. 6. $\int e^x \sin x\, dx$. 7. $\int e^{3x} \cos 6x\, dx$. 8. $\int \sin \ln x\, dx$. 9. $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

Тема 3. Метод заміни змінної (метод підстановки)

Теоретичні відомості

Нехай функція $t = \varphi(x)$ визначена і має неперервну похідну на інтервалі (a, b) і нехай множиною значень цієї функції є інтервал (c, d). Нехай також для функції $f(t)$ на інтервалі (c, d) існує первісна $F(t)$:

$$\int f(t)\, dt = F(t) + C, \quad t \in (c, d).$$

Тоді на інтервалі (a, b) функція $f(\varphi(x)) \varphi'(x)$ має первісну, яка дорівнює $F(\varphi(x))$, тобто

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C\,,\ \ x\in(a\,,b).$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть інтеграли методом заміни змінної.

1.1. $\int \sin^4 x \cos x\, dx$. 1.2. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{x^2+1}$. 1.3. $\int \frac{x^2\, dx}{x^3-4}$. 1.4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$. 1.5. $\int x e^{x^2}\, dx$.

1.6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$. 1.7. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$. 1.8. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 1.9. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}\, dx}{x}$. 1.10. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$.

1.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$. 1.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

2. Знайдіть інтеграли, використовуючи заміну змінної та інтегрування частинами.

2.1. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$. 2.2. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. 2.3. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть інтеграли методом заміни змінної.

1.1. $\int \cos^{10} x \sin x\, dx$. 1.2. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. 1.3. $\int x^5\sqrt{x^6+9}\, dx$. 1.4. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

1.5. $\int x^2 \operatorname{tg} x^3\, dx$. 1.6. $\int \frac{xdx}{x^2-16}$. 1.7. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\, dx$. 1.8. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1}dx$. 1.9. $\int \frac{\ln^5 x\, dx}{x}$.

1.10. $\int \frac{e^x\, dx}{(e^x+2)^4}$. 1.11. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$. 1.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

2. Знайдіть інтеграли, використовуючи заміну змінної та інтегрування частинами.

2.1. $\int e^{\sqrt{x}} dx$. 2.2. $\int \arcsin x\, dx$. 2.3. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Тема 4. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбніца

Теоретичні відомості

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a\,,b]$. Розіб'ємо цей відрізок за допомогою точок $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n частин $[x_0\,,x_1],[x_1\,,x_2],\ldots,[x_{n-1}\,,x_n]$. Таке розбиття позначимо символом T. На кожному з відрізків розбиття T довільним чином обирається точка $c_i\in[x_{i-1}\,,x_i]$, $i=1\,,\ldots,n$. Нехай також $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ – довжина $i-$го відрізка розбиття T. Нехай також λ – найбільша з довжин частинних відрізків розбиття T, тобто $\lambda=\min\limits_{i=1,\ldots,n}\Delta x_i$.

Число

$$I_n(f;\, x_i\,,\, c_i) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

називається ***n*−*ою* інтегральною сумою** функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка T і заданому вибору точок c_i на частинних відрізках.

Число I називається ***границею послідовності інтегральних*** сум $I_n(f;\, x_i\,,\, c_i)$ при $\lambda \to 0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розбиття T відрізка $[a, b]$, для якого $\lambda < \delta$, незалежно від способу вибору точок $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ має місце нерівність $|I_n(f;\, x_i\,,\, c_i) - I| < \varepsilon$. Функція $f(x)$ називається ***інтегровною*** на відрізку $[a, b]$, якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум при $\lambda \to 0$. Сама ця границя називається ***визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ по відрізку $[a, b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона на цьому відрізку обмежена. Функція, яка є неперервною на відрізку, інтегровна на цьому відрізку.

Основні властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ (за означенням). 2. $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$ при $a < b$ (за означенням).

3. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровні на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку інтегровні функції $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ та $f(x)\, g(x)$, при цьому має місце рівність

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то для будь-якого $k \in \mathbb{R}$ функція $kf(x)$ інтегровна на цьому відрізку і має місце рівність

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

5. Нехай $c \in [a, b]$. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на кожному з відрізків $[a, c]$ та $[c, b]$. Навпаки, якщо функція $f(x)$ інтегровна на кожному з відрізків $[a, c]$ та $[c, b]$, то вона інтегровна на відрізку $[a, b]$. При цьому має місце рівність

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ – будь-яка первісна для функції $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце ***формула Ньютона-Лейбніца:***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Різниця значень функції у двох точках позначається наступним чином: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$. Формула Ньютона-Лейбніца з використанням цього позначення набуває вигляду:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $f(x)$ невід'ємна та неперервна на відрізку $[a,b]$, то інтеграл від функції $f(x)$ по відрізку $[a,b]$ дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції $f(x)$, віссю абсцис та прямими $x=a$ та $x=b$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла. Якщо тіло або матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(x)$, то шлях, що проходить тіло або матеріальна точка від моменту часу t_1 до моменту часу t_2, визначається за формулою

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Обчисліть інтеграли.

1.1. $\int_0^2 (3x^2-5x+7)\,dx$. 1.2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$. 1.3. $\int_0^{1/2} e^{-2x}\,dx$. 1.4. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$. 1.5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$.

1.6. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x-3)^2}$. 1.7. $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\,dx$. 1.8. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x}\,dx$. 1.9. $\int_0^{\pi/2} \sin 3x \cos x\,dx$. 1.10. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

1.11. $\int_0^1 \frac{3^x+12^x}{6^x}\,dx$. 1.12. $\int_{-2}^1 f(x)\,dx$, де $f(x)=\begin{cases} 2x-1, \text{ якщо } x<0, \\ x^2-1, \text{ якщо } x\geqslant 0. \end{cases}$

2. Обчисліть площу криволінійної трапеції, що обмежена вказаними лініями.

2.1. $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. 2.2. $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$.

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Швидкість її руху змінюється за законом

$$v(t)=28-2t,$$

де v – швидкість, м/с; t – час, с. Знайдіть:

3.1. шлях, який пройшла матеріальна точка за перші 3 с від початку руху;

3.2. шлях, який пройшла матеріальна точка від початку руху до моменту зупинки.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Обчисліть інтеграли.

1.1. $\int\limits_{-1}^{0}(4x^3-8x+3)dx$. 1.2. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 1.3. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6}\operatorname{ctg}3x\,dx$. 1.4. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{6x+1}$. 1.5. $\int\limits_{2}^{4}\frac{dx}{x^2-1}$.

1.6. $\int\limits_{0}^{13}\sqrt[3]{2x+1}\,dx$. 1.7. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\cos^2 x\,dx$. 1.8. $\int\limits_{1}^{4}\frac{\sqrt{x}+x}{x^3}dx$. 1.9. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\cos 4x\cos x\,dx$.

1.10. $\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{dx}{1+\cos 4x}$. 1.11. $\int\limits_{0}^{1}\frac{5^x-2^x}{10^x}dx$. 1.12. $\int\limits_{-1}^{\pi/3}f(x)\,dx$, де $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x<0,\\ \sin x, \text{ якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$

2. Обчисліть площу криволінійної трапеції, що обмежена вказаними лініями.

2.1. $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. 2.2. $y=\frac{x}{x^2+4}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

3. Матеріальна точка рухається прямолінійно. Швидкість її руху змінюється за законом

$$v(t)=68-4t,$$

де v – швидкість, м/с; t – час, с. Знайдіть:

3.1. шлях, який пройшла матеріальна точка за перші 5 с від початку руху;

3.2. шлях, який пройшла матеріальна точка від початку руху до моменту зупинки.

Тема 5. Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

Теоретичні відомості

Нехай кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ має неперервну похідну на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Символічна форма цієї формули є наступною:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі виконується наступним чином. Нехай виконуються три умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) функція $x=\varphi(t)$ задана і має неперервну похідну на відрізку $[\alpha, \beta]$, при цьому областю значень функції $\varphi(t)$ є відрізок $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.

За таких умов має місце формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt .$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

1.1. $\int_0^{1/2} xe^{2x}\,dx$. 1.2. $\int_1^{e^2} x^2 \ln x\,dx$. 1.3. $\int_0^1 (2x+1)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$. 1.4. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод заміни змінної.

2.1. $\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+4}$. 2.2. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\,dx$. 2.3. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2.4. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$. 2.5. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+6}$.

2.6. $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$. 2.7. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 2.8. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. 2.9. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$. 2.10. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \sin x^2\,dx$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

1.1. $\int_{-1}^0 (4x+1)e^x\,dx$. 1.2. $\int_e^{e^2} x\ln x\,dx$. 1.3. $\int_0^{\pi/3} (3x-1)\cos x\,dx$. 1.4. $\int_1^e \cos(\ln x)\,dx$.

2. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод заміни змінної.

2.1. $\int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+4}}$. 2.2. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4 x \sin x\,dx$. 2.3. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x\,dx}{x}$. 2.4. $\int_0^{0{,}5\ln 2} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$. 2.5. $\int_0^4 \frac{dx}{10-\sqrt{x}}$.

2.6. $\int_0^1 x(x^2+1)^{10}dx$. 2.7. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}$. 2.8. $\int_{\pi^2/16}^{\pi^2/9} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 2.9. $\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx$.

2.10. $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x\cos x^2\,dx$.

Тема 6. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Теоретичні відомості

Довжина дуги плоскої кривої

1) Крива L ***задана явно:*** $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну на відрізку $[a,b]$, то довжина такої кривої знаходиться за формулою

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

2) Крива L ***задана параметрично:*** $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. Якщо кожна з функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ має на відрізку $[\alpha,\beta]$ неперервну похідну, то довжина такої кривої знаходиться за формулою

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

3) Крива L ***задана полярним рівнянням:*** $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$. Якщо функція $\rho(\varphi)$ має на відрізку $[\alpha,\beta]$ неперервну похідну, то довжина такої кривої знаходиться за формулою

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Площі плоских фігур

1) Криволінійна трапеція. Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком функції $y=f(x)$, що задана, неперервна та невід'ємна на відрізку $[a,b]$, віссю абсцис та вертикальними прямими $x=a$ та $x=b$, то площа такої криволінійної трапеції знаходиться за формулою

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2) Нехай на відрізку $[a,b]$ задані дві неперервні функції $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$, при цьому для всіх $x\in[a,b]$ має місце нерівність $f_1(x)\leqslant f_2(x)$. Площа фігури, яка обмежена графіками цих функцій та вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ знаходиться за формулою

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx\,.$$

3) Нехай крива L задана полярним рівнянням: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, при цьому функція $\rho(\varphi)$ невід'ємна та неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$. Площа криволінійного сектора, що обмежений графіком кривою L та променями $\rho=\alpha$ і $\rho=\beta$, знаходиться за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Об'єм тіла обертання

Нехай на відрізку $[a,b]$ задана невід'ємна та неперервна функція $y=f(x)$. Якщо криволінійну трапецію, що обмежена графіком функції $f(x)$, віссю абсцис та вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$, обертати навколо осі абсцис, то об'єм тіла обертання, що при цьому утворюється, обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана явно: $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана параметрично:

$$x=2(\cos t+t\sin t),\ y=2(\sin t-t\cos t),\ \ 0\leqslant t\leqslant\pi\,.$$

3. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана полярним рівнянням: $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

4. Обчисліть площу фігури, яка обмежена графіками функції $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$.

5. Обчисліть площу фігури, яка обмежена кривою, що задана полярним рівнянням:

$$\rho=4(1-\sin\varphi).$$

6. Криволінійна трапеція обмежена однією аркою синусоїди $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$ та віссю абсцис. Трапеція обертається навколо осі абсцис. Знайдіть об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана явно: $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана параметрично:

$$x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ \ 0\leqslant t\leqslant\ln 2\,.$$

3. Знайдіть довжину дуги кривої, що задана полярним рівнянням: $\rho=\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$.

4. Обчисліть площу фігури, яка обмежена графіками функції $y=x^2+2x-1$, $y=3-x$.

5. Обчисліть площу фігури, яка обмежена кривою, що задана полярним рівнянням: $\rho=4\cos 2\varphi$.

6. Криволінійна трапеція обмежена графіком функції $y=\sqrt[3]{x^2}$, віссю абсцис та вертикальними прямими $x=1$, $x=8$. Трапеція обертається навколо осі абсцис. Знайдіть об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється.

Розділ 5. Теорії ймовірностей

Тема 1. Елементи комбінаторики

Теоретичні відомості

Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкта a об'єкт b можна вибрати k способами, то вибір впорядкованої пари об'єктів (a,b) можна здійснити mk способами.

Правило суми. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b можна вибрати k способами, при цьому кожен варіант вибору об'єкта a відрізняється від вибору об'єкта b, то вибір одного з об'єктів a або b можна здійснити $m+k$ способами.

І правило добутку, і правило суми застосовне для будь-якої кількості об'єктів.

Комбінацією без повторень із n елементів по k називається будь-який ***невпорядкований*** набір, що містить k різних елементів із заданих n елементів. Кількість комбінацій із n по k обчислюється за формулою

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число C_n^k дорівнює кількості способів, за допомогою яких можна: 1) із n ***різних*** елементів відібрати k ***різних*** елементів, причому неважливо, в якій послідовності цей вибір робити; 2) k ***однакових*** предметів розкласти по n ***різних*** місцях так, щоб на кожному місці знаходився не більше ніж один предмет.

Розміщенням без повторень із n елементів по k називається будь-який ***впорядкований*** набір, що містить k різних елементів із заданих n елементів. Кількість розміщень із n по k обчислюється за формулою

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Число A_n^k дорівнює кількості способів, за допомогою яких можна: 1) із n ***різних*** елементів відібрати k ***різних*** елементів у певній послідовності; 2) k ***різних*** предметів розкласти по n ***різних*** місцях так, щоб на кожному місці знаходився не більше ніж один предмет.

Перестановкою без повторень із n елементів називається розміщення із n по n. Кількість перестановок із n елементів знаходиться за формулою

$$P_n = n!.$$

Число P_n дорівнює кількості способів, за допомогою яких можна: 1) із n ***різних*** елементів відібрати всі n ***різних*** елементів у певній послідовності; 2) n ***різних*** предметів розкласти по n ***різних*** місцях так, щоб на кожному місці знаходився рівно один предмет.

Завдання для авдиторної роботи

1. У класі навчаються 12 юнаків та 15 дівчат. Для проведення випускного вечора потрібно обрати двох ведучих — юнака та дівчину. Скільки таких пар може бути обрано?

2. На колі зафіксовано 20 точок. Скільки вписаних у це коло трикутників можна побудувати, використовуючи ці точки як вершини трикутників?

3. Користувач створює пароль. При цьому можна використовувати буків латинського алфавіту, цифри і спеціальні символи $, # та &. Пароль є чуттєвим до реєстру. Скільки всього можна створити шестизначних паролів?

4. Із набору чисел 7, 11, 13, 17, 19 та 23 утворюють звичайні дроби, записуючи по одному числу у чисельнику та знаменнику дробу. Скільки дробів можна утворити таким чином і при цьому так, щоб вони представляли різні раціональні числа?

5. У магазині є у продажу молоко 8 торгових марок. Покупець обирає 2 пакети молока. Скількома способами можна зробити покупку, якщо: а) молоко повинно бути різних торгових марок; б) молоко може бути однієї торгової марки.

6. У студентській групі навчаються 18 студентів. До активу групи потрібно обрати трьох студентів: старосту, заступника та профорга. Скількома способами можна здійснити такий вибір?

7. Скільки всього існує чотиризначних натуральних чисел, кратних 5 і таких, у яких друга цифра є непарною?

8. У книжці-розмальовці є зображення 5 різних повітряних кульок. Дитина має 12 фломастерів різного кольору і хоче розфарбувати ці кільки різними кольорами. Скількома способами вона може це зробити?

9. У колоді 36 карт. Скількома способами можна роздати 6 карт так, щоб серед них були: 1) рівно 2 десятки; 2) принаймні одна десятка?

10. Дев’ятеро бігунів виконують забіг на 1 км. Скількома способами можуть бути розподілені між ними місця з першого по дев’яте за результатами забігу?

11. У групі програмістів навчаються 25 студентів, у групі фінансистів — 20 студентів і у групі геодезистів — 12 студентів. Скількома способами можна обрати двох студентів для чергування так, щоб вони були одногрупниками?

12. Десятьох студентів на занятті з фізкультури потрібно вишикувати в ряд. Скількома способами це можна зробити, якщо першим повинен стояти найвищий студент?

13. До кав'ярні зайшли троє відвідувачів і помітили, що в залі є 12 вільних місць. Скількома способами ці троє можуть розміститися по вільних місцях?

14. П'ять однакових марок потрібно розклеїти на 15 різних конвертах. Скількома способами це можна зробити, якщо на кожен конверт можна клеїти лише одну марку?

15. На книжкову полицю потрібно поставити 10 книжок, із яких 3 є детективами, а решта 7 — фантастикою. Скількома способами можна здійснити таку розстановку так, щоб детективи на полиці були розташовані поруч?

Завдання для індивідуальної роботи

1. Кав'ярня пропонує відвідувачам 8 видів чаю та 12 видів сендвічів. Скількома способами відвідувач може замовити собі ланч із 1 чаю та 1 сендвічу?

2. Із 15 видів саджанців яблунь садівник хоче придбати для вирощування 3. Скількома способами він це може зробити?

3. Логін для реєстрації в системі складається з букв латинського алфавіту та цифр. Логін є нечуттєвим до реєстру. Скільки всього логінів із 8 символів може бути створено?

4. У просторі зафіксовано 30 точок. Скільки всього ненульових векторів може бути побудовано, якщо використовувати ці точки як початку та кінці векторів?

5. У магазині канцтоварів у продажу є 12 видів блокнотів. Відвідувачу потрібно придбати 3 блокноти. Скількома способами він може це зробити, якщо: 1) всі блокноти повинні бути різними; 2) блокноти можуть бути і однаковими.

6. Троє друзів замовляють собі по одній порції морозива. Скількома способами вони можуть здійснити таке замовлення, якщо в наявності є 14 видів морозива і всі троє обирають різні його види?

7. Скільки існує парних восьмизначних натуральних чисел, в яких третя, п'ята та сьома цифри можуть бути або 3, або 5, або 7?

8. У лотерейному білеті треба заповнити 5 клітинок. У кожну клітинку записується одне число із перших ста натуральних чисел. За умовами лотереї всі записані до клітинок числа повинні бути різними. Скількома способами можна заповнити такий лотерейний білет?

9. Є повна колода карт: 52 карти і 2 джокери. Скільки існує таких роздач по 6 карт, в яких: 1) рівно один туз і рівно один туз; 2) принаймні один джокер?

10. Слухач формує плейлист із 20 вподобаних композицій. Скільки варіантів такого плейлиста він може утворити?

11. У коробці лежать 10 синіх, 12 жовтих та 8 зелених олівців. З коробки дістають три олівці. Скільки способів існує це зробити так, щоб олівці були одного кольору?

12. В керівництві компанії працюють 8 менеджерів, а у відділі реклами — 10 співробітників. На перемовини з клієнтом потрібно направити 2 менеджерів, один я яких буде керівником групи, а другий його помічником, і трьох спеціалістів з реклами. Скількома способами може бути утворена така делегація?

13. Скількома способами 4 пасажирів автобуса можуть вийти на 10 зупинках маршруту, якщо на всі четверо будуть виходити на різних зупинках?

14. За обіднім столом є 10 вільних місць. Скількома способами можна на вільних місцях розставити однакові тарілки для 6 гостей при умові, що одна на кожне місце ставиться лише одна тарілка?

15. У конкурсі співаків беруть участь 12 виконавців, із них двоє виконують народні пісні. Кожен співак виступає лише один раз. Скількома способами можна скласти програму їхнього виступу так, щоб народна пісня виконувалася на початку і в кінці конкурсу?

Тема 2. Ймовірність випадкової події

Теоретичні відомості

Подія називається ***випадковою,*** якщо її настання неможливо точно передбачити. Випадкова подія розглядаються як результат спеціально організованого ***випробування.*** Передбачається, що такі випробування можна повторювати достатню кількість разів у незмінних умовах. У кожному випробуванні можна виділити найпростіші наслідки, що називаються ***елементарними подіями.*** Множина всіх елементарних подій даного випробування називається ***простором елементарних подій*** цього випробування.

Нехай простір елементарних подій деякого випробування складається із n рівноможливих елементарних подій, A – випадкова подія, якій сприяють m елементарних подій (наслідків) цього випробування.

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості наслідків, сприятливих для події A, до загальної кількості елементарних наслідків цього випробування:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Подія називається ***неможливою*** у даному випробуванні і позначається $\varnothing$, якщо вона не відбувається у жодному з наслідків цього випробування. Подія називається ***достовірною*** у даному випробуванні і позначається Ω, якщо вона відбувається у жодному з наслідків цього випробування. Кажуть, що подія A сприяє події B, якщо подія B настає всякий раз, коли настає подія A. Подія $\bar{A}$ називається протилежною до події A, якщо вона настає (не настає) тоді, коли подія A не настає (настає).

Властивості класичної ймовірності

1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для будь-якої випадкової події A.

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing)=0$.

3. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці: $P(\Omega)=0$.

4. Якщо подія A сприяє події B, то $P(A) \leqslant P(B)$.

5. Сума ймовірностей події A та протилежної їй події $\bar{A}$ дорівнює одиниці: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Нехай проведено декілька випробувань, в кожному з яких може настати одна і та сама випадкова подія. ***Відносною частотою*** випадкової події називається число, що дорівнює кількості випадків, в яких було зафіксовано настання події, до загальної кількості проведених випробувань.

Завдання для авдиторної роботи

1. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде не більше двох очок?

2. Підкидають два гральних кубики. Знайдіть ймовірність того, що добуток очок, які випали на кубиках, буде дорівнювати 12.

3. У непрозорому пакеті лежать 30 карток, пронумерованих від 1 до 30. Із пакета навмання дістають одну картку. Яка ймовірність того, що її номер буде дільником числа 30?

4. У групі навчаються 20 студентів: 8 юнаків та 12 дівчат. Жеребкуванням розігрують 2 квитки до кінотеатру. Знайдіть ймовірність того, що обидва вони дістануться дівчатам.

5. У непрозорому ящику лежать 12 куль, що відрізняються лише кольором: 7 куль — сині, 5 — жовті. З ящика навмання дістають 4 кулі. Знайдіть ймовірність того, що серед них: 1) 2 кулі сині; 2) принаймні одна куля синя.

6. На кубиках написані букви “Б”, “У”, “К”, “В”, “А”. Дитина, яка не вміє читати, бере по одному кубику і складає їх підряд. Знайдіть ймовірність того, що: 1) із трьох обраних в такий спосіб кубиків складеться слово “КУБ”; 2) із п’яти обраних в такий спосіб кубиків складеться слово “БУКВА”.

7. Абонент забув три останні номери телефонного номеру і набирає його навмання. Знайдіть ймовірність правильного набору номеру з першої ж спроби.

8. Із колоди в 36 карт роздають 6 карт. Яка ймовірність того, що до роздачі потрапить принаймні один туз?

9. Є 10 карток, пронумерованих від 1 до 10. Картки ретельно перемішали і виклали одну за однією. Знайдіть ймовірність того, що картки будуть викладені у порядку зростання номерів.

10. Із повної колоди в 52 карти дістають 3. Знайдіть ймовірність того, що це будуть трійка, сімка і туз.

11. У першому ряду перед сценою актової зали є 6 місць. На ці місця випадковим чином сідають шестеро осіб, двоє із яких є друзями. Знайдіть ймовірність того, що ці двоє друзів будуть сидіти поруч.

12. Для підготовки до іспиту викладач підготував 30 запитань. У кожному білеті 5 різних запитань. Студент знає відповіді на 20 запитань із цих 30. Знайдіть ймовірність того, що у білеті, що він витягнув, буде принаймні одне відоме йому запитання.

13. У непрозорій коробці містяться 10 однакових куль, що пронумеровані від 1 до 10. Із коробки навмання відібрали 6 кульок. Знайдіть ймовірність того, що серед них будуть кульки з номерами 2 та 4.

14. Тритомна енциклопедія містить загалом 1500 сторінок. Виявилося, що на різних сторінках міститься 5 одруків. Якою є відносна частота появи одруку на одній сторінці у такому видавництві? Скільки приблизно можна прогнозувати одруків, якщо буде видано матеріал об’ємом 6000 сторінок?

Завдання для індивідуальної роботи

1. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде не менше трьох очок?

2. Підкидають два гральних кубики. Знайдіть ймовірність того, що сума очок на кубиках не перевищить 5.

3. В календарі на рік випадковим чином була закреслена дата. Знайдіть ймовірність того, що це буде 29 число.

4. В групі навчаються 25 студентів: 15 бюджетників та 10 контрактників. Навмання за номерами в журналі були обрані двоє студентів. Знайдіть ймовірність того, що вони обидва є бюджетниками.

5. Коробка містить 30 однакових за формою і вагою пачок чаю. У 20 із них містить зелений чай, у решті 10 — чорний. Навмання із пачки дістали 6 пачок чаю. Знайдіть ймовірність того, що серед них: 1) 2 пачки чорного чаю; 2) принаймні одна пачка зеленого чаю.

6. На кубиках написані букви “В”, “А”, “Г”, “О”, “Н”, “И”. Дитина, яка не вміє читати, бере по одному кубику і складає їх підряд. Знайдіть ймовірність того, що: 1) із чотирьох обраних в такий спосіб кубиків складеться слово “НОГА”; 2) із шести обраних в такий спосіб кубиків складеться слово “БАТОНИ”.

7. Пін-код складається із чотирьох цифр. Користувач забув другу та четверту цифри і набирає код навмання. Знайдіть ймовірність правильного набору коду з першої ж спроби.

8. Із колоди в 36 карт роздають 10 карт. Яка ймовірність того, що до роздачі потраплять один туз та одна сімка?

9. Вісьмох учнів випадковим чином вишикували у шеренгу по одному. Знайдіть ймовірність того, що вони будуть стояти за зростом від найвищого до найнижчого.

10. У непрозорій торбинці лежить повний набір шахових фігур. З торбинки навмання дістали три фігури. Знайдіть ймовірність того, що це будуть пішак, кінь та ферзь.

11. Відеокліп монтується з 20 окремих кадрів, які об’єднують підряд випадковим чином. На двох із кадрів зображено пейзажі. Знайдіть ймовірність того, що у змонтованому кліпі кадри із пейзажами йтимуть один за одним.

12. У вікторину підготовлено 30 питань: 8 з історії, 12 з фізики і 10 з математики. Гравець відповідає на 4 випадковим чином обрані питання. Знайдіть ймовірність того, що принаймні одне з цих питань буде з математики.

13. Продавець повітряних кульок тримає 15 кульок, на яких написані номери від 1 до 15. Випадковим поривом вітру віднесло 6 кульок. Знайдіть ймовірність того, що серед них були кульки з номерами 2, 4 та 8.

14. На виробництві було перевірено партію із 1000 деталей. Із них 3 виявилися бракованими. Якою є відносна частота появи браку на даному виробництві? Скільки приблизно бракованих деталей можна очікувати у партії із 5000 деталей?

Тема 3. Теореми додавання та множення ймовірностей

Теоретичні відомості

Сумою випадкових подій A та B називається така випадкова подія $A+B$, що відбувається тоді і тільки тоді, коли у випробуванні відбувається принаймні одна з подій A або B. ***Добутком*** випадкових подій A та B називається така випадкова подія AB, що відбувається тоді і тільки тоді, коли у випробуванні відбуваються обидві події A та B.

Дві події називається ***сумісними,*** якщо вони можуть відбутися при проведенні одного випробування, і ***несумісними,*** якщо в одному випробуванні вони відбутися не можуть. Дві події називаються ***залежними,*** якщо поява однієї з них впливає на ймовірність появи другої. Якщо ж поява однієї з цих подій не впливає на ймовірність появи іншої, то такі події називаються ***незалежними.***

Якщо події A та B несумісні, то ймовірність їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Якщо події A та B сумісні, то ймовірність їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей подій без ймовірності їхнього добутку:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Якщо події A та B незалежні, то ймовірність їхнього добутку дорівнює добутку ймовірностей подій:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Умовною ймовірністю події B називається ймовірність $P(B|A)$ події B, обчислена в припущенні, що подія A відбулася.

Якщо події A та B залежні, то ймовірність їхнього добутку дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій, помноженій на умовну ймовірність другої в припущенні, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***попарно несумісними,*** якщо будь-які дві із цих подій є несумісними. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то ймовірність їхньої суми дорівнює сумі ймовірностей подій:

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***попарно незалежними,*** якщо будь-які дві із цих подій є незалежними. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються ***незалежними в сукупності (або просто незалежними),*** якщо будь-які дві із цих подій є незалежними і кожна подія є незалежною з будь-якими добутками решти подій. Якщо події попарно незалежні, то взагалі кажучи, вони не є незалежними в сукупності.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні в сукупності, то ймовірність їхнього добутку дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ залежні, то має місце формула

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1}).$$

Завдання для авдиторної роботи

1. Ймовірність реалізації пенальті одним із футболістів дорівнює 0,8, а другий — 0,7. Кожен із футболістів зробив один удар. Знайдіть ймовірність того, що: 1) обидва удари будуть результативними; 2) лише один удар буде результативним; 3) принаймні один удар буде результативним.

2. Ділянка електричного кола складається із двох лампочок, які з'єднані послідовно. Ймовірність того, що при проведенні експерименту згорить перша лампочка, дорівнює 0,1, а для другої така ймовірність дорівнює 0,3. Знайдіть ймовірність того, що при проведенні експерименту струму на ділянці кола не буде.

3. Електродвигун при кожному вмиканні запускається з ймовірністю 0,98. Знайдіть ймовірність того, що для запуску двигуна знадобиться: 1) рівно 2 вмикання; 2) не більше двох вмикань.

4. У двох коробках лежать більярдні кулі, що відрізняються лише кольором. У першій коробці 8 синіх, 5 жовтих та 7 зелених куль. В другі коробці 10 синіх, 4 жовтих та 6 зелених куль. З кожної коробки навмання дістали по одні кулі. Знайдіть ймовірність того, що вони будуть однокольоровими.

5. На першій книжковій полиці стоять 10 книг детективів і 5 книг фантастики. На другій полиці 6 книг детективів і 4 книги фантастики. З кожної полиці навмання взяли по дві книжки. Знайдіть ймовірність того, що всі вони будуть одного жанру.

6. На картках написані букви “К”, “А”, “Р”, “М”, “А”. Картки ретельно перемішали і розклали підряд одна за одною. Знайдіть ймовірність того, що в такий спосіб утвориться слово “МАРКА”.

7. В лотерею випущено 60 білетів, що занумеровані від 1 до 60. Гравець придбав один білет. Яка ймовірність того, що номер цього білета буде або парним, або кратним трьом? Розв’яжіть задачу двома способами: за класичним означенням ймовірності та за теоремою додавання.

8. Гральний кубик підкинули двічі. Знайдіть умовну ймовірність $P(A|B)$ для наступних подій:

$$A = \text{“при другому підкиданні випала п'ятірка”}, \quad B = \text{“сума очок, що випали, не менше 10”}.$$

9. Студент підготував на залік 25 питань із 30. Кожне питання надруковане на окремій картці. Студент дістає два питання одне за одним. Яка ймовірність того, що обидва вони будуть відомими студенту? Розв’яжіть задачу двома способами: за класичним означенням ймовірності та за теоремою множення.

10. Ймовірність успішного проходження співбесіди для першого претендента становить 0,9, для другого і третього претендентів така ймовірність дорівнює 0,8 та 0,4 відповідно. Знайдіть ймовірність того, що співбесіду успішно пройдуть: 1) тільки двоє претендентів; 2) принаймні один претендент.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Ймовірність влучного трьохочкового кидка для першого баскетболіста дорівнює 0,95, а для другого — 0,88. Кожен баскетболіст виконав трьохочковий кидок. Знайдіть ймовірність того, що: 1) обидва кидки будуть влучними; 2) лише один кидок буде влучним; 3) принаймні один кидок буде влучним.

2. Ділянка електричного кола складається із двох лампочок, які з’єднані паралельно. Ймовірність того, що при проведенні експерименту згорить перша лампочка, дорівнює 0,2, а для другої така ймовірність дорівнює 0,1. Знайдіть ймовірність того, що при проведенні експерименту струму на ділянці кола не буде.

3. Сканер відбитків пальців телефону може не спрацювати при кожному розблокуванні з ймовірністю 0,12. Знайдіть ймовірність того, що для розблокування телефону знадобиться: 1) рівно дві спроби; 2) щонайменше дві спроби.

4. В першій групі навчаються 20 студентів: 4 відмінники, 10 на добре та відмінно, 6 трієчників. В другій групі — 22 студенти: 5 відмінників, 10 на добре та відмінно, 7 трієчників. З кожної групи навмання відібрали по одному студенту. Знайдіть ймовірність того, що вони мають однакову успішність.

5. В одному конверті лежать 16 карток, на 10 з яких написані парні числа, а на решті 6 — непарні числа. В другому конверті 20 карток із 12 парними числами і 8 непарними числами. З кожного конверта навмання дістали по дві картки. Знайдіть ймовірність того, що вони матимуть однакову парність.

6. На картках написані букви “К”, “А”, “Н”, “О”, “Н”, “А”, “Д”, “А”. Картки ретельно перемішали і розклали підряд одна за одною. Знайдіть ймовірність того, що в такий спосіб утвориться слово “АНАКОНДА”.

7. З колоди в 52 карти витягли навмання одну карту. Яка ймовірність того, що це буде або пікова карта, або фігура (фігурами в картах називають валета, даму або короля)? Розв’яжіть задачу двома способами: за класичним означенням ймовірності та за теоремою додавання.

8. Гральний кубик підкинули двічі. Знайдіть умовну ймовірність $P(A|B)$ для наступних подій:

$$A = \text{“при першому підкиданні випала двійка”}, \quad B = \text{“сума очок, що випали, менше 4”}.$$

9. Продаються 100 лотерейних білетів, 5 із яких є виграшними, решта — ні. Перший гравець купує білет і за ним другий гравець купує ще один білет. Знайдіть ймовірність того, що обом гравцям дістануться виграшні білети. Розв’яжіть задачу двома способами: за класичним означенням ймовірності та за теоремою множення.

10. Перший студент складає іспит на відмінно з ймовірністю 0,7, а другий та третій — з ймовірностями 0,8 та 0,1 відповідно. При підготовці до іспиту між студентами відсутня будь-яка комунікація. Знайдіть ймовірність того, що на відмінно іспит складуть: 1) тільки двоє студентів; 2) принаймні один студент.

Тема 4. Формули повної ймовірності та Байєса

Теоретичні відомості

Повною групою подій називається така множина випадкових подій, в які події є попарно несумісними і в результаті випробування відбудеться одна із цих подій. Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_n$ є заданими подіями. Вони утворюють повну групу, якщо виконуються дві умови:

1) $H_k H_j = \varnothing,\ i \neq j$; 2) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$.

Якщо подія A може відбутися в результаті появи однієї з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей подій цієї групи на відповідні умовні ймовірності події A:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \cdots + P(H_n)P(A|H_n).$$

Ця формула носить назву ***формула повної ймовірності.*** Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу, називаються ***гіпотезами.*** Сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці:

$$P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1.$$

Ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$, які обчислені до проведення випробування, називаються апріорними. Ймовірності гіпотез, обчислені після проведення випробування, коли подія A відбулася, називаються апостеріорними. Апостеріорні ймовірності, взагалі кажучи, відрізняються від апріорних і можуть бути обчислені за формулою Байєса:

$$P(H_k|A)=\frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

В цій формулі $P(A)$ – повна ймовірність події A.

Завдання для авдиторної роботи

1. На трьох виробничих лініях виготовляють деталі. Деталі надходять до відділу контролю якості: 40% з першої лінії, 25% з другої лінії і 35% з третьої лінії. В середньому 1% деталей, що надійшли з першої лінії, при перевірці виявляються бракованими. Для другої та третьої ліній такий процент дорівнює 4% та 2% відповідно. Для перевірки у відділі контролю обрали одну деталь. Знайдіть ймовірність того, що вона виявиться бракованою.

2. У магазині електроніки є у продажу навушники чотирьох брендів: 14 штук першого бренду, 28 другого, 36 третього та 22 четвертого. Гарантія 1 рік на всі види навушників. В середньому 1% навушників першого бренду ламаються протягом гарантійного терміну. Для другого, третього та четвертого брендів цей процент становить 5%, 4% та 2% відповідно. Покупець придбав одну пару навушників у цьому магазині. Через місяць навушники зламалися. Знайдіть ймовірність того, що вони належать до третього бренду.

3. У першій коробці 12 синіх та 8 жовтих куль. У другій коробці 5 синіх та 15 жовтих куль. З обох коробок навмання дістали по одній кулі, а потім із цих двох куль навмання обрали одну. Знайдіть ймовірність того, що ця кулі виявиться жовтою.

4. У першій коробці 3 сині і 7 жовтих куль, у другій коробці 5 синіх та 5 жовтих куль, і у третій коробці 8 синіх та 2 жовті кулі. З першої коробки навмання дістали кулю і переклали до другої. Потім з другої коробки навмання дістали кулю і переклали до третьої коробки. Після цього з третьої коробки навмання дістали кулю. Знайдіть ймовірність того, що вона виявиться синьою.

5. Студент складає іспит, підготувавши 20 білетів із 25. Перед ним білети взяли двоє його одногрупників. Яка ймовірність того, що цьому студенту дістанеться відомий білет?

6. Кількість жінок, які відвідують супермаркет за день, відноситься до кількості чоловіків, як $3:2$. Один із виробників проводить рекламну акцію, розклавши зразки своєї продукції на рекламному столику. Ймовірність того, що біля рекламного столика зупиниться жінка, дорівнює 0,7. Для чоловіків така ймовірність становить 0,4. Біля столику зупинилася людина з числа відвідувачів супермаркету. Знайдіть ймовірність того, що це жінка.

7. Викладач підготував для складання заліку 20 задач з диференціального числення, 20 з інтегрального та 10 з теорії ймовірностей. Студент вміє розв’язувати 18 задач з диференціального числення, 15 з інтегрального та 7 з теорії ймовірностей. Відомо, що студент розв’язав запропоновану задачу на заліку. Знайдіть ймовірність того, що це була задача з теорії ймовірностей.

8. Троє дослідників в різних лабораторіях незалежно один від одного проводять фізичний експеримент, в процесі якого виконується вимірювання певної фізичної величини. Ймовірності того, що похибка вимірювання не перевищить 4%, дорівнює 0,95, 0,94 та 0,92 для першого, другого та третього дослідника відповідно. В результаті проведених дослідів виявилося, що

похибка вимірювання не перевищила 4% у двох дослідників. Знайдіть ймовірність того, що це були другий та третій дослідники.

9. Троє менеджерів незалежно один від одного працюють над своєю частиною завдання. Ймовірність вчасного виконання для першого менеджера дорівнює 0,95, а для другого та третього — 0,86 та 0,92 відповідно. Вчасно виконав свою частину завдання лише один менеджер. Знайдіть ймовірність того, що це був другий менеджер.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Троє виробників пакують свою продукцію і надсилають до магазину у співвідношенні $3:2:5$. В середньому у 2% випадків пакування буває пошкодженим для першого виробника, а для другого та третього такий процент становить 1% та 0,5% відповідно. Покупець придбав у магазині одну одиницю продукції цих виробників. Яка ймовірність того, що йому дістанеться товар з пошкодженим пакуванням?

2. Із 25 студентів групи 4 є відмінниками, 12 навчаються на відмінно і добре, 7 мають задовільні оцінки, решта 2 студентів на сесіях отримують незадовільні оцінки. На практичному занятті з вищої математики відмінники розв'язують задачу з ймовірністю 0,9, ті, хто навчається на відмінно та добре — з ймовірністю 0,75, трієчники — з ймовірністю 0,4, студенти, що отримують під час сесії незадовільні оцінки — з ймовірністю 0,2. Задачу, яку задав викладач, розв'язав обраний студент. Знайдіть ймовірність того, що цим студентом був трієчник.

3. В одному фотоальбомі 50 фотографій, на 10 з яких портрети людей, а на решті 40 — пейзажі. В другому фотоальбомі 40 фотографій, половина з яких із портретами людей, а друга половина — з пейзажами. З кожного фотоальбому навмання дістали по одній фотографії, а потім із цих двох фотографій навмання обрали одну. Знайдіть ймовірність того, що на цій фотографії буде пейзаж.

4. В першій авдиторії перебувають 20 студентів, з яких 12 бюджетників та 8 контрактників; в другій авдиторії — 23 студентів (13 бюджетників та 10 контрактників) і в третій авдиторії 10 студентів (7 бюджетників та 3 контрактники). З першої та третьої авдиторій до другої перейшло по одному навмання обраному студенту. Після цього з другої авдиторії вийшов студент. Знайдіть ймовірність того, що це бюджетник.

5. В лотерею випущено 100 білетів, лише 7 із яких є виграшними. Яка ймовірність придбати виграшний білет для гравця, якщо перед ним двоє гравців придбали по одному білету?

6. В просторі пролітають заряджені частинки двох типів, кількості яких відносяться як $5:2$. Прилад для виявлення цих частинок фіксує частинки першого типу з ймовірністю 0,98, а другого типу — з ймовірністю 0,95. Прилад зафіксував проліт частинки. Знайдіть ймовірність того, що це була частинка першого типу.

7. В редакції журналу лежать 12 статей англійською мовою, на 10 з яких позитивна рецензія, а на інші 2 — негативна. Статей українською мовою 20 (19 з позитивною і 1 з негативною рецензією), а статей німецькою мовою — 5 (3 з позитивною і 2 з негативною рецензією). Редактор навмання відібрав статтю і виявилося, що вона має позитивну рецензію. Знайдіть ймовірність того, що ця стаття написана українською мовою.

8. Троє школярів здають норматив з бігу. Ймовірність успішної здачі першого школяра дорівнює 0,85, а для другого та третього — 0,7 та 0,4 відповідно. В результаті лише двоє школярів здали норматив. Знайдіть ймовірність того, що це були перший та другий школяр.

9. На ділянці електричного кола експериментальної установки ввімкнено три резистори. Перший перегорає з ймовірністю 0,02, другий та третій — з ймовірностями 0,01 та 0,04 відповідно. Під час проведення експерименту перегорів один резистор. Знайдіть ймовірність того, що це був другий резистор.

Тема 5. Схема Бернуллі

Теоретичні відомості

Кажуть, що декілька послідовних випробувань проводяться за ***схемою Бернуллі,*** якщо виконуються наступні умови:

1) випробування є незалежними;

2) в кожному з випробувань розглядається одна і та ж сама випадкова подія;

3) ймовірність цієї випадкової події однакова в усіх випробуваннях.

Нехай A є випадковою подією, що розглядається в схемі Бернуллі, $p=P(A), q=P(\bar{A})=1-q$. Нехай також n – кількість проведених випробувань. Розглядаються три основні задачі для схеми Бернуллі.

1) Знайти ймовірність того, що в серії із n випробувань подія A з'явиться рівно k разів. Таку ймовірність позначають символом $P_n(A)$.

2) Знайти ймовірність того, що в серії із n випробувань подія A з'явиться від k_1 до k_2 разів. Таку ймовірність позначають символом $P_n(k_1, k_2)$.

3) Знайти найбільш ймовірне число раз, які з'явиться подія A в серії із n випробувань.

Перша задача розв'язується за ***формулою Бернуллі:***

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Для розв'язання другої задачі використовується наступна формула:

$$P_n(k_1, k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Число m_0, що є найбільш ймовірною кількістю разів, які відбудеться подія A в серії із n випробувань, є цілим числом, що задовольняє подвійну нерівність

$$np-q \leqslant m_0 \leqslant np+p.$$

Цю нерівність може задовольняти одне або два цілих числа.

Якщо кількість випробувань досить велика, то використання формули Бернуллі приводить до вельми громіздких обчислень. В таких випадках використовують асимптотичні теореми, в яких даються наближені рівності, за якими можна обчислити ймовірності $P_n(k)$ та $P_n(k_1, k_2)$. В цих теоремах використовуються дві спеціальні функції — функція Гаусса і функція Лапласа. Властивості цих функцій відомі і для них складені таблиці значень.

Функцією Гаусса називається функція, що визначається формулою

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функція Гаусса парна: $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Крім того, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. Тому в практичних розрахунках приймають, що $\varphi(x)=0$ для всіх x таких, що $|x|>4$.

Функцією Лапласа називається функція, що визначається формулою

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Функція Лапласа непарна: $\Phi(-x)=\Phi(x)$. Крім того, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)=0{,}5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)=-0{,}5$. Тому в практичних розрахунках приймають, що

$$\Phi(x)=0{,}5 \text{ при } x\geqslant 5 \text{ і } \Phi(x)=-0{,}5 \text{ при } x\leqslant -5.$$

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо число випробувань n достатньо велике і $0<p<1$, то має місце наближена рівність

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо число випробувань n достатньо велике і $0<p<1$, то має місце наближена рівність

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

І локальна, і інтегральна теореми Муавра-Лапласа дають прийнятну для практичних розрахунків похибку при виконанні умови $npq\geqslant 10$.

Теорема Пуассона. Якщо $n\to\infty$, $p\to 0$ і при цьому $np\to\lambda=\text{const}$, то має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Тому якщо число випробувань n достатньо велике, а ймовірність p близька до нуля, то має місце наближена рівність

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ця формула називається ***формулою Пуассона.*** Вона дає невелику похибку, прийнятну для практичних розрахунків, при виконанні умови $npq < 10$.

Завдання для авдиторної роботи

1. Монетку підкинули 6 разів. Знайдіть ймовірність того, що герб випаде чотири рази.

2. Баскетболіст реалізує трьохочковий кидок з ймовірністю 0,8. Знайдіть ймовірність того, що при п'яти кидках у кошик: 1) два будуть результативними; 2) результативними будуть не більше двох; 3) результативним буде принаймні один.

3. В результаті багаторічних спостережень за погодою встановлено, що ймовірність дощу для деякого міста 4 жовтня становить $1/7$. Яке найбільш ймовірне число дощових днів 4 жовтня варто очікувати протягом 50 років?

4. В середньому 80% статей, що надходять до редакції журналу, отримують позитивну рецензію і публікуються. До редакції надійшло 32 статті. Скільки із них найбільш ймовірно буде опубліковано?

5. Картка для проходу через турнікет не спрацьовує в 10% випадків. Через турнікет пройшло 400 пасажирів. Знайдіть: 1) ймовірність того, що картка не спрацює у 30 пасажирів; 2) картка не спрацює від 31 до 60 випадків; 3) картка не спрацює у не менш як 60 пасажирів; 4) найбільш ймовірне число пасажирів, у яких картка не спрацює.

6. Ймовірність виникнення проблем з мобільним інтернетом в деякому місті протягом дня у одного абонента дорівнює 0,001. За день було опитано 4000 абонентів. Знайдіть: 1) ймовірність того, що троє з них мали проблеми з мобільним інтернетом; 2) ймовірність того, що не більше трьох абонентів мали проблеми з мобільним інтернетом протягом дня; 3) ймовірність того, що принаймні один абонент мав проблеми з мобільним інтернетом протягом дня; 4) найбільш ймовірну кількість абонентів, які мали проблеми з мобільним інтернетом протягом дня.

7. Перший стрілок влучає в десятку з ймовірністю 0,8, а другий — з ймовірністю 0,6. Стрілки виконали 20 залпів. Знайдіть найбільш ймовірну кількість залпів, при яких обидва стрілки влучать в десятку.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Гральний кубик підкинули 4 рази. Знайдіть ймовірність того, що п'ятірка випаде три рази.

2. Футболіст реалізує пенальті з ймовірністю 0,7. Знайдіть ймовірність того, що при виконанні шести пенальті: 1) п'ять будуть результативними; 2) результативними будуть не більше трьох; 3) результативним буде принаймні один.

3. Букмекер правильно передбачає результат матчу (перемога, нічия або поразка) деякої команди з ймовірністю 0,85. Скільки найбільш ймовірно правильних прогнозів буде зроблено цим букмекером, якщо команда проведе 70 матчів?

4. В чорновому варіанті рукопису книжки ймовірність наявності одруків на одній сторінці дорівнює 0,75. У запропонованому чорновому варіанті книжки 95 сторінок. На скількох із них найбільш ймовірно будуть одруки?

5. За статистикою центрів зайнятості, 80% випускників деякого року влаштувалися на роботу за фахом. Навмання були відібрані 400 випускників. Знайдіть: 1) ймовірність того, що серед них рівно 60 випускників працюють за фахом; 2) ймовірність того, що від 20 до 62 випускників працюють за фахом; 3) не менше 60 випускників працюють за фагом; 4) найбільш ймовірну кількість випускників, які працюють за фахом.

6. На виробництві мікросхем ймовірність браку становить 0,002. За день було виготовлено і перевірено 3000 мікросхем. Знайдіть: 1) ймовірність того, що рівно 2 мікросхеми будуть бракованими; 2) ймовірність того, що не більше трьох мікросхем будуть бракованими; 3) ймовірність того, що принаймні одна мікросхема буде бракованою; 4) найбільш ймовірне число мікросхем, що будуть бракованими.

7. На першому сайті, що публікує пронози погоди, ймовірність правильного передбачення дощу на поточний день становить 0,85. Прогнози другого сайту щодо дощу справджуються з ймовірністю 0,93. Яке найбільш ймовірне число правильних прогнозів буде розміщено на обох сайтах, якщо спостерігати за їхніми прогнозами протягом 90 днів?

Тема 6. Дискретні випадкові величини

Теоретичні відомості

Величина X називається ***випадковою,*** якщо наперед неможливо точно передбачити, якого саме зі своїх можливих значень набуде ця величина в результаті випробування. Дискретна випадкова величина — це випадкова величина, що набуває окремих ізольованих значень.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається відповідність між всіма можливими значеннями цієї величини та ймовірностями, з якими ці значення набуваються:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Сума всіх ймовірностей в будь-якому законі розподілу дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Функцією розподілу дискретної випадкової величини X називається ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, менше $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція розподілу неспадна, кусково-стала і задовольняє нерівність $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$. Крім того, справедливі граничні співвідношення

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх значень цієї величини на відповідні їм ймовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Математичне сподівання має наступні властивості.

1. $M(C)=C$, $C\in\mathbb{R}$. 2. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

3. Якщо величини X та Y незалежні, то $M(XY)=M(X)M(Y)$.

4. $M(kX)=kM(X)$, $k\in\mathbb{R}$.

Відхиленням дискретної випадкової величини X називається різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням: $X-M(X)$. Відхилення саме є випадковою величиною і його математичне сподівання дорівнює нулю: $M(X-M(X))=0$.

Дисперсією дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата її відхилення: $D(X)=M(X-M(X))^2$.

Дисперсія має наступні властивості:

1. $D(X)\geqslant 0$, при цьому $D(X)=0$ тоді і тільки тоді, коли величина X є сталою: $X=C$.

2. $D(kX)=k^2 D(X)$, $k\in\mathbb{R}$.

3. Якщо величини X та Y незалежні, то $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

4. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Формула, наведена у властивості 4 дисперсії, більш зручна для розрахунків, ніж та, що наведена в означенні дисперсії. В розгорнутому вигляді ця формула представляються наступним чином:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2.$$

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини називається квадратний корінь із її дисперсії: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Завдання для авдиторної роботи

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-1	0	1	2	4
p	0,05	0,15	a	0,1	0,2

Знайдіть параметр a та числові характеристики величини X: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-2	1	3	5
p	$0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}3$

Складіть функцію розподілу $F(x)$ цієї величини та побудуйте її графік.

3. Троє студентів складають іспит з вищої математики. Ймовірність успішної здачі іспиту першим студентом дорівнює 0,8, а для другого та третього студента ця ймовірність становить 0,9 та 0,4. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості студентів із цих трьох, які успішно склали іспит з вищої математики.

4. На шляху руху автомобіля стоять 4 світлофори. Кожен із них дозволяє рух з ймовірністю 0,5. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості світлофорів, які автомобіль мине без зупинки.

5. У партії із 6 деталей лише 4 стандартні. Навмання із цих деталей відібрали 3. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед відібраних.

6. Кількості викликів пожежних команд до двох районів міста задані таблицями розподілу

X	0	1	2
p	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}3$

Y	0	1	2
p	$0{,}7$	$0{,}2$	$0{,}1$

В якому із цих районів вища пожежна небезпека?

7. В лотерею випущено 1000 білетів. Ціна одного білета — 10 грн. Серед цих білетів на один припадає виграш 2000 грн, і ще на два білети — по 1000 грн. Решта білетів ж невиграшними. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – величини чистого виграшу для гравця, який купив один білет. Оцініть перспективність (прибутковість) цієї лотереї з точки зору гравця.

8. Випадкові величини X та Y незалежні та мають наступні закони розподілу:

X	-1	0	1
p	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}3$

Y	-1	1	2	3
p	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}1$

Користуючись властивостями математичного сподівання та дисперсії, обчисліть наступні величини: $M(2X+5)$, $M(3X-2Y)$, $M(XY)$, $D(4X)$, $D(X+Y)$. Складіть закони розподілу випадкових величин $4X$, X^2, $X+Y$, XY.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-2	0	1	2	3
p	a	$0{,}35$	$0{,}05$	$0{,}04$	$0{,}26$

Знайдіть параметр a та числові характеристики величини X: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

2. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	-5	0	4	8
p	0,3	0,5	0,1	0,1

Складіть функцію розподілу $F(x)$ цієї величини та побудуйте її графік.

3. Троє друзів грають у гру. Перший з них переходить на наступний рівень з ймовірністю 0,8, а другий та третій — з ймовірністю 0,95 та 0,75 відповідно. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості друзів із цих трьох, які змогли перейти на наступний рівень гри.

4. Баскетболіст реалізує кожен трьохочковий кидок з ймовірністю 0,8. Було виконано 4 таких кидки. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості реалізованих трьохочкових кидків.

5. У відділі фірми працюють 5 менеджерів та 3 маркетологи. Навмання відібрали трьох співробітників. Складіть закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості менеджерів, що потрапили до вибірки.

6. Кількості клієнтів, з якими укладають договори страхові клієнти протягом тижня, задані таблицями розподілів:

X	0	1	2	3
p	0,1	0,5	0,3	0,1

Y	0	1	2	3
p	0,6	0,2	0,05	0,15

Оцініть ефективність роботи кожного із цих страхових агентів.

7. “Колесо фортуни” розділено на 10 однакових секторів, на яких написані числа 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 400, 500. Колесо обертається, гравець робить ставку на сектор. Гравцю виплачується приз, що дорівнює номеру сектора, на який вкаже стрілка після зупинки колеса. Вартість ставки — 150 грн. Оцініть перспективність такої гри з точки зору гравця.

8. Випадкові величини X та Y незалежні та мають наступні закони розподілу:

X	-2	0	2	3
p	0,5	0,2	0,2	0,1

Y	0	1	2
p	0,1	0,5	0,4

Користуючись властивостями математичного сподівання та дисперсії, обчисліть наступні величини: $M(4Y-3)$, $M(2X+5Y)$, $M(XY)$, $D(2X)$, $D(X+Y)$. Складіть закони розподілу випадкових величин $3X$, X^2, $X+Y$, XY.