

Кам'янський державний енергетичний технікум

**ПЛАН-КОНСПЕКТ ВІДКРИТОГО ЗАНЯТТЯ
З МАТЕМАТИКИ НА II КУРСІ НА ТЕМУ:**

**«Класичне та статистичне означення
ймовірності. Залежні та незалежні події.
Операції над подіями. Теореми
додавання та множення ймовірностей»**

Підготувала
Шматок І.О.,
викладач математики та
інформатики, спеціаліст

2017

Тема: Класичне та статистичне означення ймовірності. Залежні та незалежні події. Операції над подіями. Теореми додавання та множення ймовірностей

Мета: формувати в студентів поняття події, випадкової події, вірогідної події, неможливої події, розглянути основні теореми множення та додавання та наслідки з них, дати класичне та статистичне означення ймовірності; учити знаходити ймовірність рівноможливих подій у найпростіших випадках; розвивати пізнавальні здібності студентів, інтерес при розв'язуванні задач, логічне мислення, пам'ять, навички колективної праці, об'єктивного оцінювання знань одногрупників та самооцінювання; виховувати наполегливість у досягненні мети; зібраність, уважність, охайність у роботі, самостійність під час роботи на занятті;

Методична тема заняття: використання елементів технології розвитку критичного мислення на заняттях математики.

Обладнання: мультимедійний екран, презентація, роздатковий матеріал (додаток А), чорна скриня із завданнями.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу

Структура заняття

н/п	Етапи заняття	Відведений час
I	Організаційний етап	2 хв
II	Повідомлення теми, теми, мети заняття, мотивація навчальної діяльності;	3 хв
III	Перевірка домашнього завдання, актуалізація опорних знань.	15 хв
IV	Вивчення нового навчального матеріалу	25 хв
V	Формування вмінь і навичок	25 хв
VI	Домашня робота	5 хв
VII	Підсумок. Рефлексія	5 хв

Хід заняття:

I. Організаційний етап _2хв_

Викладач вітається зі студентами, робить перекличку, і відмічає відсутніх.

II. Повідомлення теми і мети, мотивація навчальної діяльності _3хв_

Тема нашого сьогоднішнього заняття: «Класичне та статистичне означення ймовірності. Залежні та незалежні події. Операції над подіями. Теорема додавання та множення ймовірностей». Ми дізнаємося і вивчимо класичне та статистичне означення ймовірності, що називається подією, різновиди подій та основні теореми додавання і множення.

Зараз важко уявити наше життя без інформації ймовірнісного характеру: прогнози погоди, обґрунтування економістів, оцінювання політиками і вченими різних ситуацій у країні і за кордоном. Доводиться оцінювати свої шанси на успіх у тій чи іншій ситуації, сфери діяльності.

Тому пропоную вам зіграти сьогодні у чорну скриню. (Після кожного виконаного вами завдання, у вас є можливість випробувати свій фарт. Потрібно занурити свою руку у чорну скриню, витягнути завдання, розв'язання якого ви продемонструєте в кінці заняття. Хай вам щастить)

III. Перевірка домашнього завдання, актуалізація опорних знань __15хв__

Зараз ми з вами згадаємо попередньо вивчений матеріал, і найслабші студенти матимуть змогу першими випробувати долю.

Математичний диктант із взаємоперевіркою:

1. Обчисліть $4!$;
2. A_5^2 ;
3. P_3 ;
4. C_4^3 ;
5. Скількома способами можна вибрати 4 яблука із 10?
6. Скількома способами можна розподілити 3 різні путівки між 25 працівниками?
7. Скількома способами можна сформувати потяг з 8 вагонів?

8. Обчислити: $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$

Перевірка!!!

1) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;

2) $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$;

3) $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$;

4) $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{3! \cdot 4}{3! \cdot 1} = 4$; або $C_4^3 = C_4^1 = 4$;

5) $C_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$;

6) $A_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{22! \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{22!} = 23 \cdot 24 \cdot 25 = 13800$;

7) $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$;

8) $C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + \frac{6!}{5!(6-5)!} + \frac{6!}{6!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} + \frac{5! \cdot 6}{5! \cdot (6-5)!} + 1 = 15 + 6 + 1 = 22$; або

$$C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = C_6^2 + C_6^1 + 1 = 22$$

Обміняйтеся зошитом із сусідом по парті, перевірте вірність розв'язання завдань, та оцініть роботу вашого сусіда за наступними критеріями: завдання 1 – 4 по 1 балу; завдання 5 – 8 по 2 бала. Підрахуйте загальну кількість балів та виставте їх в оціночний лист.

IV. Вивчення нового навчального матеріалу __25 хв__

План вивчення матеріалу:

1. Залежні та незалежні події;
2. Класичне означення ймовірності.
3. Статистичне означення ймовірності.
4. Теореми додавання та множення ймовірностей.

Азарт кожного з нас розпочинається експериментом – *це випробування, дослід, спостереження, результати яких залежить від випадку, які можна повторити багато разів в однакових умовах.* Наприклад, наше сьогоднішнє заняття і є експеримент, як для кожного з вас, так і для мене. Те що ми всі тут зібралися – це подія; те, що надворі йде дощ або світить сонечко – це також подія.

Подія - це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначається великими буквами латинського алфавіту. *A, B, C, A1, A2, A3*. Кожна подія містить оцінку часу; вказує, коли воно відбувається і місце, де вона відбувається.

Події поділяються на: *Випадкові – Вірогідні – Неможливі*

Випадковою називається така подія, яка може відбутися або не відбутися під час певного випробування. Випадкові події бувають масовими та одиничними.

Наприклад, випадковими є події: «виграш або програш за лотерейним квитком у певній грі»; «влучення або промах у разі одного пострілу»; «випадання двох очок під час підкидання грального кубика».

Вірогідною (достовірною) називається подія, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту.

Наприклад, вірогідними є події: «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки яблука»; «наступив Новий рік після 31 грудня».

Неможливою називається подія, яка ніколи не відбувається ні за якого повторення експерименту.

Наприклад, неможливими є події: «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки вишні»; «випало 9 очок під час підкидання грального кубика».

Повною групою подій називається множина таких подій, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна з них.

Приклад. Випробування — підкидання кубика, тоді повну групу подій становлять події:

A1 — «поява 1 очка»,

A2 — «поява 2 очок»,

A3 — «поява 3 очок»,

A4 — «поява 4 очок»,

A5 — «поява 5 очок»,

A6 — «поява 6 очок»,

або події:

В1 — «поява парного числа очок»;

В2 — «поява непарного числа очок».

Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Приклад: «Попадання і промах при одному пострілі» — це дві несумісні події або «при витягуванні однієї карти з колоди поява дами і десятки» — це також дві несумісні події.

Незалежними подіями називають такі події, якщо ймовірність появи однієї з цих подій не залежить від того, відбулись інші події чи ні.

Приклад: «Монета кидається двічі». Ймовірність появи герба в 1-му випробуванні не залежить від появи чи не появи герба в 2-му випробуванні. В свою чергу, ймовірність появи герба в 2-му випробуванні не залежить від появи чи не появи герба в 1-му випробуванні. Отже, події А — «поява герба в 1-му випробуванні» і В — «поява герба в 2-му випробуванні» — незалежні.

Рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Приклад: Поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.

Якщо події:

1) утворюють повну групу подій;

2) є несумісними;

3) є рівноможливими — то такі події утворюють **простір елементарних подій**

Приклад: Випробування — «постріл по мішені», тоді події:

А — «влучаємо в ціль» і

В — «промах» - утворюють простір елементарних подій.

Частоту події можна визначити тільки після проведення випробувань, а в різних серіях випробувань, при одних і тих же умовах, частота події не буде постійною. Тому поняття частоти є поганою характеристикою події. Проте в міру збільшення числа випробувань, частота поступово стабілізується, тобто

приймає значення, яке мало відрізняється від деякого певного числа. Таким чином, з даною подією можна зв'язати деяку постійну величину, навколо якої групуються частоти і яка є характеристикою об'єктивного зв'язку між комплексом умов, при якому проводяться випробовування, і подією. Ця постійна величина називається ймовірністю події.

Нехай n – кількість усіх випробувань в окремій серії випробувань, а m – кількість тих випробувань, у яких відбулася подія A .

Статистичною ймовірністю події A називається границя, до якої наближається відносна частота $\frac{m}{n}$ події A при необмеженому збільшенні числа всіх випробувань, тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Таке означення ймовірності називається статистичним. Ймовірність події A прийнято позначати $P(A)$.

Статистичний спосіб задання ймовірності має ту перевагу, що він опирається на реальні випробовування, але має і той недолік, що для надійного визначення ймовірності необхідно провести велике число випробувань.

Статистичне означення ймовірності події хоча і досить повно відображає зміст цього поняття, але не дає змоги фактичного обчислення ймовірності, тобто не є “робочим” означенням. Тому розглядається інше, що називається класичним означенням ймовірності події.

Класичне означення ймовірності

*Відношення числа подій, які сприяють події A , до загальної кількості подій простору елементарних подій називається **ймовірністю випадкової події A** і позначається $P(A)$.*

Ймовірність вірогідної події дорівнює 1, а ймовірність неможливої події дорівнює 0.

Приклад: Знайти ймовірність того, що при киданні двох монет випаде:

а) 1 число; б) 2 герба.

Розв'язання

Нехай подія A — «випало 1 число»;

B — «випало 2 герба».

Простір елементарних подій складається з 4-х подій:

C_1 — «випало 2 герба»;

C_2 — «випали герб та число»;

C_3 — «випали число та герб»;

C_4 — «випали 2 числа».

Події A сприяють події C_2 і C_3 , тоді $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ Події B сприяє лише подія C_1 ,

тоді

$$P(B) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Відповідь: а) 0,5; б) 0,25.

Сумою подій A і B називається подія C , що полягає в здійсненні під час одиничного випробування або події A , або події B , або обох подій одночасно.

Позначається: $C=A+B$ або $C=A \cup B$.

Приклад: Подія A — «влучення в ціль з 1-го пострілу»,

подія B — «влучення в ціль з 2-го пострілу»,

подія C — «влучення в ціль при двох пострілах»,

тоді $C=A+B$.

Подія \bar{A} називається протилежною до події A , якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.

Події A і \bar{A} утворюють повну групу несумісних подій U і мають місце рівності:

$$A+U=U, \quad A+A=A, \quad A+\bar{A}=U, \quad A+\emptyset=A.$$

Приклад: Подія A — «влучаємо в ціль при пострілі», тоді подія \bar{A} — «промах при пострілі».

Теорема. Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

якщо $A \cap B = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій A_1, A_2, \dots, A_n , які утворюють повну групу і попарно несумісні, дорівнює одиниці: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Приклад: В урні лежать 2 зелених, 3 червоних і 6 синіх кульок. З неї навмання вибирають 1 кульку. Яка ймовірність того, що вона не червона?

Розв'язання

Нехай подія

B — «поява не червоної кульки»,

A_1 — «поява зеленої кульки»,

A_2 — «поява червоної кульки»,

A_3 — «поява синьої кульки», тоді

$B=A_1+A_3$, причому A_1 і A_3 — несумісні, тоді

$$P(A_1) = \frac{2}{11}, \quad P(A_3) = \frac{6}{11}. \quad \text{Отже,}$$

$$P(B) = P(A_1 + A_3) = P(A_1) + P(A_3) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:
 $P(A)+P(\bar{A})=1$.

Приклад: В урні лежать 2 зелених, 3 червоних і 6 синіх кульок. З неї навмання вибирають 1 кульку. Яка ймовірність того, що вона не червона?

Розв'язання

Нехай подія

A — «поява червоної кульки», тоді

\bar{A} — «поява не червоної кульки», причому події

A і \bar{A} — протилежні,

$$P(A) = \frac{3}{11},$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{11}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Добутком подій A і B називається подія C , що полягає в здійсненні обох подій A і B під час одиничного випробування.

Позначається: $C=A \cdot B$ або $C=A \cap B$

Приклад: Подія A — «1-й стрілець влучив в ціль»,

подія B — «2-й стрілець влучив в ціль»,

подія C — «обидва стрільці влучили в ціль», тоді $C=A \cdot B$.

Теорема. Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад: Знайти ймовірність одночасного випадання 3-х очок на кожному з гральних кубиків при одному киданні двох кубиків.

Розв'язання

Нехай подія

A — «випало 3 очки на 1-му кубику»;

B — «випало 3 очки на 2-му кубику», причому події A і B — незалежні,

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

тоді

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{36}.$$

V. Закріплення вивченого матеріалу 25 хв

Задачі для скарбнички (у скарбниці лежать задачі, які навмання витягують студенти);

Задача №1

Розклад містить 4 пари на день з різних 10-ти предметів. Скільки існує варіантів скласти розклад на один день (предмети не повторюються)?

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Задача №2

Скількома способами можна розставити 7 книжок на полиці?

$$P_7 = 7! = 5040$$

Задача №3

З 10 учнів потрібно вибрати двох для прибирання кабінету. Скільки існує варіантів вибору?

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

Задача №4

Визначити для даного випробування, які з наведених подій є випадковими, вірогідними, неможливими.

Підкидається гральний кубик і фіксується кількість очок, що випало на верхній грані:

Подія А – «випало число 3»;

Подія В – «випало число, менше ніж 7»;

Подія С – «випало парне число»;

Подія D – «випало число, що ділиться на 7»;

Подія Е – «випало число, менше ніж 5».

Події **А, С, Е** – випадкові; **В** – вірогідна, **D** - неможлива

Задача №5

Визначити для даного випробування, які з наведених подій є випадковими, вірогідними, неможливими. У мішечку 3 жовтих, 4 синіх, 5 зелених кульок.

Навмання виймається одна кулька:

Подія А – «вийнята кулька зелена»;

Подія В – «вийнята кулька синя»;

Подія С – «вийнята кулька біла»;

Подія D – «вийнята кулька кольорова»;

Подія Е – «вийнята кулька жовта або синя».

Події **А, В, Е** – випадкові; **D** – вірогідна, **С** - неможлива

Задача №6

В урні 10 однакових кульок, із яких шість білих і чотири червоні. З урни навмання виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що вийнята кулька є червоною?

Розв'язання

Подію «вийнято червону кульку» позначимо **А**. Це випробування має 10 рівноможливих наслідків, із яких чотири сприяють події **А**. Відповідно до формули маємо:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Задача №7

Що може, а що не може статися одночасно:

- a. йде дощ і світить сонце;
- b. випаде і цифра, і герб при одному підкиданні монети;
- c. дістали синю і червону кульку при діставанні однієї кульки;
- d. виграш і нічия в футболі в одному матчі.

a - може статися одночасно; b, c, d - може не статися одночасно

Задача №8

Гральний кубик підкидається один раз. Яка ймовірність того, що на верхній грані кубика випаде число 5 або число 6?

Розв'язання

Нехай подія A — «випало число 5», подія B — «випало число 6». При цьому події A і B не можуть відбутися одночасно. Подія C — «випало число 5 або число 6» — полягає в тому, що відбудеться одна з подій A або B (все одно, яка саме).

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ і } P(B) = \frac{1}{6}$$

Тоді за правилом додавання ймовірностей

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Задача №9

Підкидаються монета і гральний кубик. Яка ймовірність того, що на монеті випаде герб, а на кубику число 6?

Розв'язання

Нехай подія A — «випав герб», подія B — «випало число 6». При цьому подія A може відбутися або ні незалежно від того, відбудеться або ні подія B . Тобто, події A та B незалежні. Подія C — «випав герб і число 6» — полягає в тому, що події A і B відбудуться одночасно.

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ і } P(B) = \frac{1}{6}$$

Тоді за правилом множення ймовірностей

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Задача №10

Нехай $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ Чи сумісні події A і B ?

Розв'язання

Припустимо, що дані події не сумісні. Тоді $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1$, чого бути не може. Отже, припущення неправильне, і дані події є сумісними.

Задача №11

Нехай $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{2}$. Знайти $P(A + B)$.

Розв'язання

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Оскільки $P(AB) \neq 0$, то подія A і B сумісні.

Тоді

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

Задача №12

У коробці лежать 18 фломастерів, з яких 5 жовтих, а решта зелені. Знайдіть імовірність того, що навмання винятий фломастер буде зеленим.

(Відповідь: $0,72$; $\frac{13}{18}$)

Задача №13

Серед натуральних чисел від 1 до 20 учень називає навмання одне. Якою є ймовірність того, що це число буде дільником числа 20?

Відповідь: $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Задача №14

У коробці лежать різнокольорові кулі, з яких 10 білих, 5 чорних, решта червоні. Скільки червоних куль лежить у коробці, якщо ймовірність випадкового вибору червоної кулі дорівнює $0,8$? (Відповідь: 60.)

Задача №15

Із набору для гри в доміно, який має 28 кісточок, навмання беруть одну кісточку, і вона виявилася не дублем. Знайдіть імовірність таких подій:

A — «друга, навмання взята кісточка — дубль»;

B — «друга, навмання взята кісточка — не дубль».

Розв'язання

Набір для гри в доміно містить 7 дублів. Залишилося 27 кісточок. Тоді ймовірність події A дорівнює $P(A) = \frac{7}{27}$, а ймовірність події B становить

$$P(B) = \frac{(27 - 7)}{27} = \frac{20}{27}.$$

VI. Домашнє завдання

Задача. Куб, усі грані якого пофарбовані, розрізали на 27 рівних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання кубик: а) має 3 пофарбовані грані; б) має 2 пофарбовані грані; в) має одну пофарбовану грань; г) не має пофарбованих граней.

а) $8/27$ б) $4/9$ в) $2/9$ г) $1/27$

VI. Рефлексія

А тепер дружно кожен сам має змогу себе оцінити.

Оціночний лист Шкала оцінювання від 1-12

ІІБ _____

	Вид завдання	Кількість білів (студента)	Кількість балів (викладач)
1	Математичний диктант		
2	Завдання зі скриньки		
3	Активність на занятті		
4	Відповіді на додаткові запитання		
	Загальна кількість балів за заняття		

Студент повинен протягом пари ставити у пусті клітинки собі оцінку за роботу на занятті, а під кінець пари вивести загальну оцінку.

Список використаної літератури

1. Бабенко С. Елементи комбінаторики. Уроки алгебри і початків аналізу 11 клас / С. Бабенко, І. Маркова // Математика в школах України. – 2014. – № 3. – С.12-20.
2. Бабенко С. Елементи комбінаторики. Уроки алгебри і початків аналізу 11 клас / С. Бабенко, І. Маркова // Математика в школах України. – 2014. – № 1-2. – С.28-36.
3. Карпик В. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики / К. Карпик // Математика в школах України. – 2010. – № 15. – С.24-29.
4. Кравченко Н. Розв'язування задач з комбінаторики. Алгебра і початків аналізу, 11 клас / Н. Кравченко // Математика. – 2007. – № 7. – С.18-20.
5. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / Є. П. Нелін, О.Є. Долгова. – Харків : Гімназія, 2011. – 448 с.
6. Олійник Л. Алгебраїчний тренажер. Множини, комбінаторика, ймовірність, статистика. 11 клас : посіб. / Л. Олійник. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. – 96 с.
7. Слєпкань З. Методика вивчення елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей і вступу до статистики / З. Слєпкань, І. Соколовська // Математика. – 2004. – № 29-30. – С.5-111.

Додаток А

Опорний конспект

Тема: Класичне та статистичне означення ймовірності. Залежні та незалежні події. Операції над подіями. Теореми додавання та множення ймовірностей

Цілі заняття:

Під час заняття ми дізнаємося і вивчимо:

- класичне та статистичне означення ймовірності;
- означення події;
- різновиди подій та основні теореми додавання і множення.

Наші цілі будуть досягненні за допомоги задач практичного змісту.

Азарт кожного з нас розпочинається **експериментом** – це випробування, дослід, спостереження, результати яких залежить від випадку, які можна повторити багато разів в однакових умовах. Наприклад наше сьогоднішнє заняття і є експеримент, як для кожного з вас так і для мене. Те що ми всі тут зібралися це подія, те що надворі йде дощ або світить сонечко, це також подія.

Подія - це явище, про яке можна сказати, що воно відбувається чи не відбувається за певних умов. Події позначається великими буквами латинського алфавіту. A, B, C, A_1, A_2, A_3 . Кожна подія містить оцінку часу, що вказує, коли воно відбувається, і місця, де вона відбувається.

Події поділяються на: **Випадкові**→**Вірогідні**→**Неможливі**

Випадковою називається така подія, яка може відбутися або не відбутися під час певного випробування. Випадкові події бувають масовими та одиничними.

Наприклад: випадковими є події «виграш або програш за лотерейним квитком у певному накладі»; «влучення або промах у разі одного пострілу»; «випадання двох очок під час підкидання грального кубика».

Вірогідною (достовірною) називається подія, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту.

Наприклад: вірогідними є події «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки яблука»; «наступив Новий рік після 31 грудня».

Неможливою називається подія, яка ніколи не відбувається ні за якого повторення експерименту.

Наприклад, неможливими є події «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки вишні», «випало 9 очок під час підкидання грального кубика».

Повною групою подій називається множина таких подій, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна з них.

Приклад Випробування — підкидання кубика, тоді повну групу подій становлять події:

- A_1 — «поява 1 очка»,
 - A_2 — «поява 2 очок»,
 - A_3 — «поява 3 очок»,
 - A_4 — «поява 4 очок»,
 - A_5 — «поява 5 очок»,
 - A_6 — «поява 6 очок»,
- або події:

- B_1 — «поява парного числа очок»;
- B_2 — «поява непарного числа очок».

Попарно несумісні події — це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Приклад: Попадання і промах при одному пострілі — це дві несумісні події або при витягуванні однієї карти з колоди поява дами і десятки — це також дві несумісні події.

Незалежними подіями називають такі події, якщо ймовірність появи однієї з цих подій не залежить від того, відбулись інші події чи ні.

Приклад: Монета кидається двічі. Ймовірність появи герба в 1-му випробуванні не залежить від появи чи не появи герба в 2-му випробуванні. В свою чергу, ймовірність появи герба в 2-му випробуванні не залежить від появи чи не появи герба в 1-му випробуванні. Отже, події А — «поява герба в 1-му випробуванні» і В — «поява герба в 2-му випробуванні» — незалежні.

Рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Приклад: Поява цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при киданні грального кубика — рівноможливі події.

Якщо події:

1) утворюють повну групу подій;

2) є несумісними;

3) є рівноможливими - то такі події утворюють **простір елементарних подій**

Приклад: Випробування — постріл по мішені, тоді події:

А — «влучаємо в ціль» і

В — «промах» - утворюють простір елементарних подій.

Частоту події можна визначити тільки після проведення випробувань, а в різних серіях випробувань, при одних і тих же умовах частота події не буде постійною. Тому поняття частоти є поганою характеристикою події. Проте в міру збільшення числа випробувань, частота поступово стабілізується, тобто приймає значення, яке мало відрізняється від деякого певного числа. Таким чином, з даною подією можна зв'язати деяку постійну величину, навколо якої групуються частоти і яка є характеристикою об'єктивного зв'язку між комплексом умов, при якому проводяться випробування, і подією. Ця постійна величина називається ймовірністю події.

Нехай n — кількість усіх випробувань в окремій серії випробувань, а m — кількість тих випробувань, у яких відбулася подія А.

Статистичною ймовірністю події А називається границя, до якої наближається відносна частота $\frac{m}{n}$ події А при необмеженому збільшенні числа всіх випробувань, тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Таке означення ймовірності називається статистичним. Ймовірність події А прийнято позначати $P(A)$.

Статистичний спосіб задання ймовірності має ту перевагу, що він опирається на реальні випробування, але має і той недолік, що для надійного визначення ймовірності необхідно провести велике число випробувань.

Статистичне означення ймовірності події хоча і досить повно відображає зміст цього поняття, але не дає змоги фактичного обчислення ймовірності, тобто не є “робочим” означенням. Тому розглядається інше, що називається класичним означенням ймовірності події.

Класичне означення ймовірності

Відношення числа подій, які сприяють події A , до загальної кількості подій простору елементарних подій називається **ймовірністю випадкової події A** і позначається $P(A)$.

Ймовірність вірогідної події дорівнює 1 , а ймовірність неможливої події дорівнює 0 .

Приклад: Знайти ймовірність того, що при киданні двох монет випаде:

а) 1 число; б) 2 герба.

Розв'язання

Нехай подія A — «випало 1 число»;

B — «випало 2 герба».

Простір елементарних подій складається з 4-х подій:

C_1 — «випало 2 герба»;

C_2 — «випали герб та число»;

C_3 — «випали число та герб»;

C_4 — «випали 2 числа».

Події A сприяють події C_2 і C_3 , тоді $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$. Події B сприяє лише подія C_1 , тоді

$$P(B) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Відповідь: а) 0,5; б) 0,25.

Сумою подій A і B називається подія C , що полягає в здійсненні під час одиничного випробування або події A , або події B , або обох подій одночасно.

Позначається: $C=A+B$ або $C=A \cup B$.

Приклад: Подія A — «влучення в ціль з 1-го пострілу»,

подія B — «влучення в ціль з 2-го пострілу»,

подія C — «влучення в ціль при двох пострілах»,

тоді $C=A+B$.

Подія \bar{A} називається **протилежною до події A** , якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.

Події A і \bar{A} утворюють повну групу несумісних подій U і мають місце рівності:

$$A+U=U, \quad A+A=A, \quad A+\bar{A}=U, \quad A+\emptyset=A.$$

Приклад: Подія A — «влучаємо в ціль при пострілі», тоді подія \bar{A} — «промах при пострілі».

Теорема. Ймовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

якщо $A \cap B = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій A_1, A_2, \dots, A_n , які утворюють повну групу і попарно несумісні, дорівнює одиниці: $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Приклад Наслідок 1: В урні лежать 2 зелених, 3 червоних і 6 синіх кульок. З неї навмання вибирають 1 кульку. Яка ймовірність того, що вона не червона?

Розв'язання

Нехай подія

B — «поява не червоної кульки»,

A_1 — «поява зеленої кульки»,

A_2 — «поява червоної кульки»,

A_3 — «поява синьої кульки», тоді

$B = A_1 + A_3$, причому A_1 і A_3 — несумісні, тоді

$$P(A_1) = \frac{2}{11}, \quad P(A_3) = \frac{6}{11}. \quad \text{Отже,}$$

$$P(B) = P(A_1 + A_3) = P(A_1) + P(A_3) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:
 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

В урні лежать 2 зелених, 3 червоних і 6 синіх кульок. З неї навмання вибирають 1 кульку. Яка ймовірність того, що вона не червона?

Розв'язання

Нехай подія

A — «поява червоної кульки», тоді

\bar{A} — «поява не червоної кульки», причому події

A і \bar{A} — протилежні,

$$P(A) = \frac{3}{11},$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{11}{11} - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

Добутком подій A і B називається подія C , що полягає в здійсненні обох подій A і B під час одиничного випробування.

Позначається: $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$

Приклад: Подія A — «1-й стрілець влучив в ціль»,

подія B — «2-й стрілець влучив в ціль»,

подія C — «обидва стрільці влучили в ціль», тоді $C = A \cdot B$.

Теорема. Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Знайти ймовірність одночасного випадання 3-х очок на кожному з гральних кубиків при одному киданні двох кубиків.

Розв'язання

Нехай подія

A — «випало 3 очки на 1-му кубіку»;

B — «випало 3 очки на 2-му кубіку», причому події A і B — незалежні,

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{6}$$

тоді

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{36}.$$

Домашнє завдання

Задача. Куб, усі грані якого пофарбовані, розрізали на 27 рівних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що взятий навмання кубик: а) має 3 пофарбовані грані; б) має 2 пофарбовані грані; в) має одну пофарбовану грань; г) не має пофарбованих граней.