Методична розробка «Збірник тестів та вправ для підготовки учнів до ЗНО, НМТ з математики. «Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики»»

Вступ

З впровадженням зовнішнього незалежного оцінювання випускників закладів загальної середньої освіти українська освіта потребує переосмислення підходів до освітнього процесу, оскільки сучасний випускник повинен бути конкурентоспроможним, здатним застосовувати набуті ключові та предметні компетентності в реальному житті.

Підготовка учнів до зовнішнього незалежного оцінювання є одним із головних завдань кожного закладу загальної середньої освіти України. Основним фактором, що впливає на якість освіти та підвищення результативності випускників, є правильно спланований та організований процес підготовки до державної підсумкової атестації та ЗНО з математики.

Зовнішнє незалежне оцінювання з математики є важливим для більшості випускників закладів загальної середньої освіти. Для того, щоб учні могли якісно підготуватися до ЗНО з математики, потрібно готуватися заздалегідь, тому вчителям необхідно посилити роботу на уроках математики під час систематизації та узагальнення навчального матеріалу та роботу з відпрацювання завдань різних форм і різного ступеня складності, практикувати тестування як навчальний інструмент оцінювання і форму перевірки предметної математичної компетентності учнівської молоді.

Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики.

Перестановки, розміщення. Комбінаторні правила суми та добутку. Ймовірність випадкової події. Вибіркові характеристики.

Тестові завдання

Завдання мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

№1 ***(ЗНО 2011)*** О шостій годині визначено температуру на десяти метеостанціях. Отримані дані відображено в таблиці.

Температура (у градусах)	1	3	4	x
Кількість метеостанцій	2	3	4	1

Визначте x, якщо середнє арифметичне всіх цих даних дорівнює $3{,}5^{o}$.

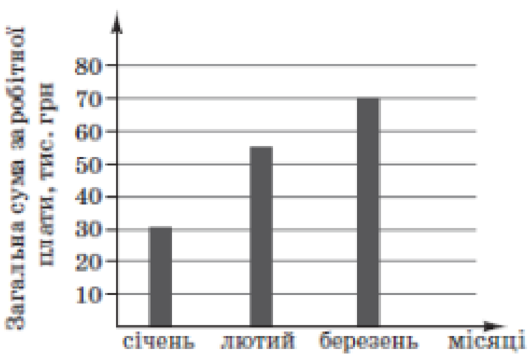
А	Б	В	Г	Д
X=5	X=6	X=7	X=8	X=9

Розв`язання:

$$\frac{2\cdot 1^{o}+3\cdot 3^{o}+4\cdot 4^{o}+1\cdot x^{o}}{2+3+4+1}=\frac{27^{o}+x^{o}}{10}=3{,}5^{o};\ 27^{o}+x^{o}=35^{o};\, x=35^{o}-27^{o}=8^{o}$$

Відповідь: Г

№2 (ЗНО 2013) На діаграмі відображено нараховану фірмою загальну суму заробітної плати усім своїм працівникам у січні, лютому та березні 2011 року. У січні на фірмі працювали 15 співробітників, у лютому — 18, а в березні — 25. Як змінилася середня нарахована заробітна плата в цій фірмі в березні порівняно з січнем?

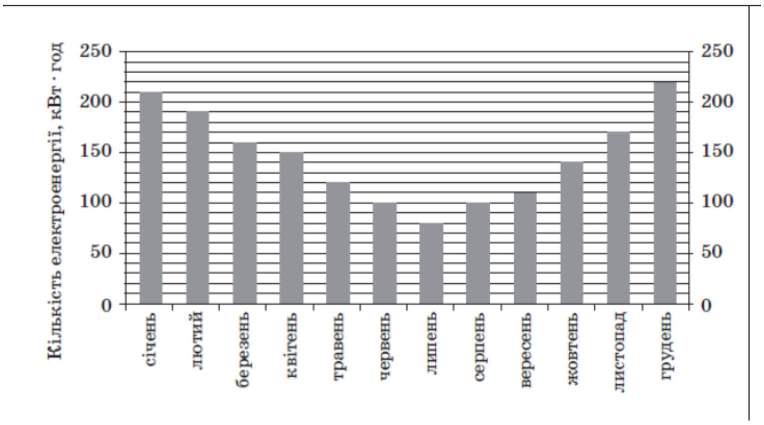


А	Б	В	Г	Д
зменшилась більше ніж на 1000 грн	зменшилась менше ніж на 1000 грн	не змінилась	збільшилась менше ніж на 1000 грн	збільшилась більше ніж на 1000 грн

Розв`язання:
Знайдемо середню заробітну плату за січень та березень
За січень: $\frac{30000}{15} = 2000\ грн$;
За березень: $\frac{70000}{25} = 2800\ грн$;
2800 грн-2000 грн=800 грн - в березні середня заробітна плата збільшилася на 800 грн порівняно з січнем ; тобто збільшилась менше ніж на 1000 грн
Відповідь: Г

№3 ***(ЗНО 2013)*** Диаграма, зображена на рисунку, містить інформацію про кількість електроенергії (у кВт·год), спожитої певною сем`єю в кожному місяці 2012 года. Користуючись діаграмою, установіть, які з наведених тверджень є правильними.

I. У грудні порівняно з липнем спожито електроенергії більше, ніж у 2 рази.
II. За всі літні місяці спожито електроенергії на 150 кВт·год менше, чім за всі весняні місяці.
III. Средньомісячне споживання електроенергії за рік є більшим за 120 кВт·год



А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I та II	лише I та III	лише II та III	I, II та III

Розв`язання:

У грудні було спожито 220 кВт·год, в липні — 80 кВт·год. Тобто в грудні порівняно з липнем було спожито електроенергії більш ніж в 2 рази.

Споживання за літні місяці: 100+80+100=280 кВт·год

Споживання за весняні місяці: 160+150+120=430 кВт·год

430−280=150 кВт·год. Тобто за всі летні місяці спожили електроенергії на 150 кВт·год меньше, ніж за всі весняні місяці.

Серендньомісячне споживання електроенергії за рік: (210+190+160+150+120+100+80+100+110+140+170+220)/12=1750/12=145.8(3) кВт·год, що більше 120 кВт·год.

Відповідь: Д.

№4 ***(ЗНО 2014)*** Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п`яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови та спортивної секції?

А	Б	В	Г	Д
5	8	10	15	28

Розв`язання:

За правилом добутку: якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент В можна вибрати (незалежно від вибору елемента А) — n способами, то пару об'єктів А і В можна вибрати mn способами $3 \cdot 5 = 15$

Відповідь: Г

№5 ***(ЗНО 2015)*** Випущено партію з 300 лотерейних білетів. Імовірність того, що навмання вибраний білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визначте кількість білетів без виграшу серед цих 300 білетів.

А	Б	В	Г	Д
6	60	294	150	240

Розв`язання:

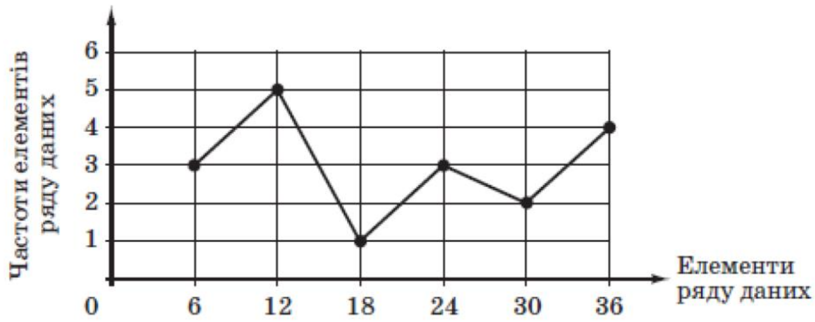
$P(A) = \frac{m}{n}$; n= 300, P(A)=1-0,2=0,8

$0,8 = \frac{m}{300}$; $m = 300 \cdot 0,8 = 240$ Отже кількість білетів без виграшу 240.

Відповідь: Д

Завдання на встановлення відповідностей

№6 ***(ЗНО 2014)*** На рисунку зображено полігон частот певного ряду даних, на якому по осі абсцис відмічені елементи цього ряду, а по осі ординат - їхні частоти. Установіть відповідність між характеристикою (1—4) цього ряду даних та її числовим значенням (А-Д).



Характеристика ряду даних	*Числове значення характеристики*
1 **кількість елементів**	**А 12**
2 **розмах**	**Б 18**
3 **мода**	**В 21**
4 **медіана**	**Г 30**
	Д 36

Розв`язання:

1) Кількість елементів - це сума усіх частот: 3+5+1+3+2+4=18.

2) Розмах вибірки – це різниця між найбільшим та найменшим значенням варіанти: 36-6=30.

3) Мода- варіанта, що має найбільшу частоту: 12.

4) Медіана - це середнє значення чисел 18 і 24 ряду даних:

6, 6, 6,12,12, 12, 12, 12, 18, 24, 24, 30, 30, 36, 36, 36, 36.

(18+24):2=21.

Відповідь:

1 кількість елементів	**Б 18**
2 розмах	**Г 30**
3 мода	**А 12**
4медіана	**В 21**

Завдання з розгорнутою відповіддю

№7 ***(ЗНО 2011)*** У відділі працює певна кількість чоловіків і жінок. Для анкетування навмання вибрали одного із співробітників. Імовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайдіть відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі.

Розв`язок:

$P(A) = \frac{m}{n}$ m=2, n=7 Отже кількість чоловіків 2, а жінок 7-2=5. Відношення кількості жінок до кількості чоловіків дорівнює 5:2=2,5

Відповідь: 2.5.

№ 8 ***(ЗНО 2012)*** Скільки існує різних дробів $\frac{m}{n}$, якщо m набуває значень 1; 2 або 4, а n набуває значень 5; 7; 11; 13 або 17?

Розв`язання: Правило добутку: якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент В можна вибрати (незалежно від вибору елемента А) — n способами, то пару об'єктів А і В можна вибрати mn способами. $\mathbf{3 \cdot 5 = 15}$

Відповідь: 15

№9 ***(ЗНО 2018)*** В Оленки є 8 різних фотографій з її зображенням та 6 різних фотографій її класу. Скільки всього в неї є способів вибрати з них 3 фотографії зі своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії свого класу для сайту школи?

Розв`язання: три фотографії зі своїм зображенням із 8 можна вибрати C_8^3 способами та 2 фотографії свого класу із 6 можна вибрати C_6^2 способами. Так як Оленка вибирала фотографії і зі своїм зображенням і фотографії класу, то використаємо правило добутку

$$C_8^3 \cdot C_6^2 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} \cdot \frac{6!}{(6-2)!\,2!} = \frac{8\ \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 15 = 840$$

Відповідь: 840 способів

№10 ***(ЗНО 2017)*** У торбинці лежать 3 цукерки молочного шоколаду та m цукерок з чорного шоколаду. Усі цукерки – однакової форми й розміру. Якого найменшого значення може набувати m, якщо ймовірність навмання витягнути з торбинки цукерку з молочного шоколаду менша за 0,25?

Розв`язання: $\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$

m = 3, n = m+3, $P(A) = \frac{3}{m+3}$; $\frac{3}{m+3} < 0{,}25$, $\frac{3}{m+3} - 0{,}25 < 0$; $\frac{-0{,}25m+2{,}25}{m+3} < 0$; $-0{,}25m + 2{,}25 < 0$; $m > 9$. Отже m може набувати найменшого значення 10

Відповідь: 10

№11*(ЗНО 2015)* У школі є два одинадцятих класи. В 11-А класі навчається 12 хлопців та 8 дівчат, а в 11-Б – 9 хлопців та 15 дівчат. З учнів цих двох класів потрібно обрати двох ведучих для проведення святкового вечора, причому хлопець має бути з 11-А класу, а дівчина – з 11-Б. Скільки всього існує варіантів вибору таких пар ведучих?

Розв`язання: за правилом добутку $12 \cdot 15 = 180$ варіантів вибору

Відповідь: 180

№12 *(ЗНО 2016)* У чайному кіоску в наявності є лише розфасований у коробки по 100 г листовий чорний чай 7 видів, серед яких є вид «чорна перлина». Покупець вирішив придбати в цьому кіоску для подарункового набору три коробки чорного чаю трьох різних видів, серед яких обов`язково повинен бути вид «чорна перлина». Скільки всього в покупця є варіантів такого придбання трьох коробок чаю для набору з наявних у кіоску?

Розв`язання: $C_6^2 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$

Відповідь: 15 варіантів

№13. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта — чорні. З урни навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вибраних дві кульки білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято три кульки) дорівнює $n = C_{20}^3$.

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «серед трьох вибраних кульок дві білі». Дві білі кульки із 12 білих кульок можна вибрати C_{12}^2 способами, а одну чорну кульку можна вибрати 8 способами, тоді події «серед трьох вибраних кульок дві білі» сприяють $m = C_{12}^2 \cdot 8$ елементарних подій.

Отже, якщо подія А — «серед трьох вибраних кульок дві білі», то

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^2 \cdot 8}{C_{20}^3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{44}{95}$$

Відповідь: $\frac{44}{95}$.

№14 . В урні лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених кульок однакових на дотик. Навмання виймають 6 кульок. Яка ймовірність того, що вийнято: 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки?

Розв'язання

В цій задачі випробування полягає в тому, що із урни виймають 6 кульок. Вийняти шість кульок із 15 + 9 + 6 = 30 кульок можна $n = C_{30}^{6}$ способами. Нас цікавить ймовірність події А — «вийнято 1 зелену, 2 синіх і 3 червоних кульки». Одну зелену кульку можна вийняти C_6^1 способами, 2 синіх кульки можна вийняти C_9^2 способами, 3 червоних кульки можна вийняти C_{15}^3 способами. Отже, події А сприяють $m = C_6^1 \cdot C_9^2 \cdot C_{15}^3$ елементарних подій. Тоді

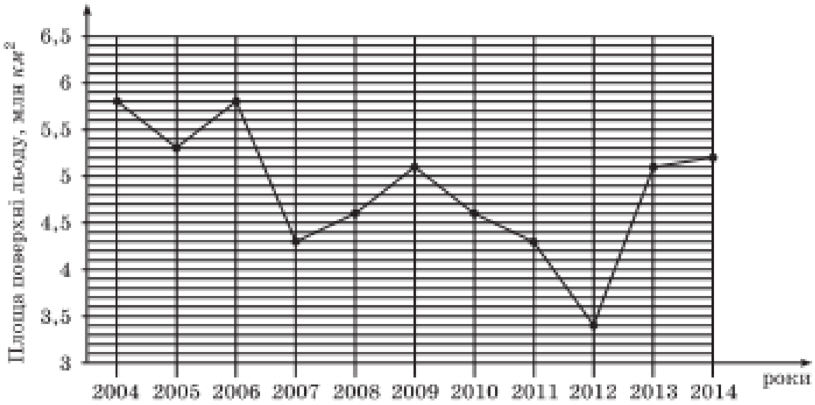
$$P(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{24}{145}$$

Відповідь: $\frac{24}{145}$.

Завдання для самостійного опрацювання

№1 У школі є два одинадцятих класи. В 11-А класі навчається 13 хлопців та 8 дівчат, а в 11-Б – 9 хлопців та 15 дівчат. З учнів цих двох класів потрібно обрати двох ведучих для проведення святкового вечора, причому хлопець має бути з 11-А класу, а дівчина – з 11-Б. Скільки всього існує варіантів вибору таких пар ведучих?

№ 2 На рисунку жирними точками позначено річні мінімуми площі поверхні арктичного льоду, що спостерігалися в період з 2004р. по 2014 р. (для наочності точки з`єднано відрізками). По горизонталі відмічено роки, а по вертикалі – площу поверхні льоду (у млн км^2). Користуючись наведеною інформацією, визначте із вказаного періоду рік, у якому величина річного мінімуму площі поверхні льоду змінилась найбільше порівняно з попереднім роком.



А	Б	В	Г	Д
2006 р.	2007 р.	2009 р.	2012 р.	2013 р.

№3 Учень з понеділка до п`ятниці записував час (у хвилинах), який він витрачав на дорогу до школи та зі школи (див. таблицю).

Дорога Дні	понеділок	вівторок	середа	четвер	п`ятниця
до школи	19	20	21	17	23
зі школи	28	22	20	25	30

На скільки хвилин у середньому дорога зі школи триваліша за дорогу до школи?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

№4 У коробці лежать різнокольорові кульки, з яких ***40*** - червоні, ***20*** - коричневі, а всі, що залишилися - жовті. З'ясуйте, скільки жовтих кульок лежить у коробці, якщо ймовірність вибору випадковим чином жовтої кульки дорівнює ***0,75.***
Відповідь: 180

№5 У групі 25 студентів. Щодня двоє з них чергують. Чи можна так скласти графік чергування на рік, щоб жодна пара тих самих студентів не чергувала два рази протягом року?

Відповідь: можна

№6 В скриньці лежать 10 однакових за формою кульок: 2 білих, 5 зелених, 3 червоних. Яка ймовірність того, що навмання взята кулька: а) зелена; б) не зелена?

№7 Скількома способами можна з 20 чоловік призначити двох чергових з однаковими обов'язками?

№8 Скількома способами можна розставити на полиці 6 книг різних авторів?

№9 Скількома способами із групи в 30 чоловік можна вибрати два делегата на конференцію, якщо делегати мають різне повноваження?

№10 З 10 різних троянд і 5 різних гербер потрібно скласти букет, що містить 3 троянди і 2 гербери. Скільки різних букетів можна скласти?

№11 В скриньці 6 білих і 8 чорних кульок. З неї вийняли дві кульки. Яка ймовірність того, що вони будуть чорними? Яка ймовірність того, що вони будуть одного кольору? Яка ймовірність того, що вони будуть різнокольорові?

№12 В урні знаходиться 12 кульок: п'ять білих і сім чорних. Навмання виймають три кульки. Яка ймовірність того, що серед вийнятих кульок:
а) всі три чорні; б) дві чорні і одна біла;
в) одна чорна і дві білі; г) всі три білі?

Відповіді: а) $\frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$; б) $\frac{5C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{21}{44}$; в) $\frac{7C_5^2}{C_{12}^3} = \frac{7}{22}$; г) $\frac{C_5^3}{C_{12}^2} = \frac{1}{22}$.