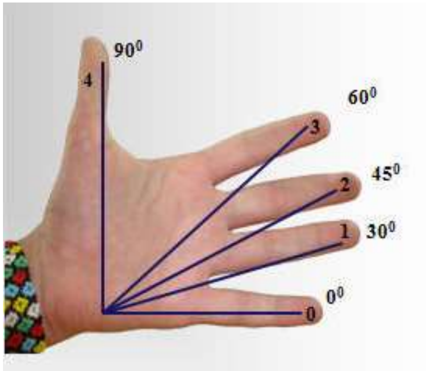
Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

На минулому занятті ми з вами розглянули таблицю значень тригонометричних функцій різних кутів. Сьогодні я хочу показати ще один метод знаходження значень синусів цих кутів.



Використовуємо ліву руку

Загальна формула для знаходження значення синуса кута

$$\frac{\sqrt{n}}{2}$$

Де n - номер пальця.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існ.	0	не існ.	0
ctg α	не існ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існ.	0	не існ.

Співвідношення між синусом і косинусом.

Нехай точка $P_\alpha(x, y)$ одиничного кола отримана поворотом точки $P_0(1; 0)$ на кут α радіан, тоді згідно з означенням синуса і косинуса:

$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ (рис. 100)

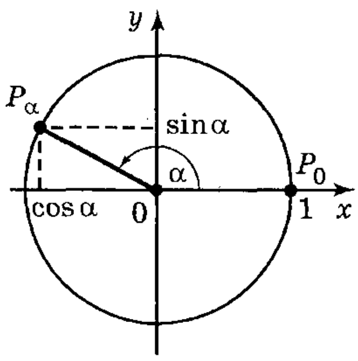


Рис. 100

Оскільки точка $P_\alpha(x;y)$ належить одиничному колу, то координати $(x; y)$ задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = 1$. Підставивши в це рівняння замість x і y значення $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, отримаємо:

$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ або (враховуючи, що $(\cos\alpha)^2 = cos^2\alpha, (\sin\alpha)^2 = sin^2\alpha$))

$$cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$$

Таким чином $\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$ для всіх значень α.

Ця рівність називається **основною тригонометричною тотожністю**.

З основної тригонометричної тотожності можна виразити sin α через cos α і навпаки.

$$\mathbf{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\,, \qquad \mathbf{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,.$$

Співвідношення між тангенсом і котангенсом.

Згідно з визначенням тангенса і котангенса

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\,, \quad \boldsymbol{ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\,.$$

Перемноживши ці рівності, одержимо

$$tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

Отже, $\boldsymbol{tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1}$ для всіх значень α,де існують ці тригонометричні функції.

Із одержаної рівності можна виразити $tg\ \alpha$через$ctg\ \alpha$і навпаки:

$$\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha}}\,; \qquad \boldsymbol{ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}}\,.$$

Приклади застосування основних співвідношень між тригонометричними функціями одного аргументу

1) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; Знайти $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8;$$

2) $\sin\alpha - tg\ \alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha = 0$

3) $sin^2 3 + ctg^2 3\cdot\sin^2 3 = sin^2 3 + \frac{\cos^2 3}{sin^2 3}\cdot sin^2 3 = sin^2 3 + \cos^2 3 = 1$

Закріплення вивченого матеріалу.

Нижче наведено зразки доведення тотожностей , спрощення виразів. В зошит все переписувати не потрібно, адже дуже багато матеріалу.

Перегляньте кожен приклад, що не розумієте занотуйте, - розберемо разом на уроці.

Доведіть тотожність

а) $(tg\ \alpha + ctg\ \alpha)\cos^2\alpha = ctg\ \alpha$;

$$(tg\ \alpha + ctg\ \alpha)\cos^2\alpha = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\cdot\cos^2\alpha =$$
$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\ \alpha\,;$$

б) $(1 - \cos^2 \alpha)(1 + tg^2\alpha) = tg^2\alpha$.

$$(1 - \cos^2 \alpha)(1 + tg^2\alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = tg^2\alpha.$$

Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = ctg^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = -\dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = -tg^2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \cdot ctg\, x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = tg\, x$;

г) $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot tg^2\alpha = \dfrac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$;

ґ) $\dfrac{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha\, (1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha\, (1 - \sin^2 \alpha)} = \dfrac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = 1$;

д) $\dfrac{\sin^4 \beta - \sin^6 \beta}{\cos^4 \beta - \cos^6 \beta} = \dfrac{\sin^4 \beta\, (1 - \sin^2 \beta)}{\cos^4 \beta\, (1 - \cos^2 \beta)} = \dfrac{\sin^4 \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos^4 \beta \cdot \sin^2 \beta} = \dfrac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = tg^2\beta$.

Відомо, що кут $\boldsymbol{\alpha}$ гострий. Обчисліть значення:

а)$\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

б) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

в) $tg\alpha$, якщо $cos\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25}} = \sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$,

$tg\ \alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5} : \dfrac{2}{5} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$;

г) $ctg\alpha$, якщо $tg\alpha = 4$, $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{1}{4}$.

Знаючи, що $\boldsymbol{\sin \alpha = \frac{4}{5}}$, обчисліть значення $\boldsymbol{\cos \alpha}$, $\boldsymbol{tg\alpha}$ і $\boldsymbol{ctg\alpha}$ за умови, що:

а) $\mathbf{0} < \alpha < \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$;

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$;

$tg\ \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{3}$;

$ctg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{3}{4}$.

б) $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} < \alpha < \pi$;

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$;

$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}$;

$ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = -\frac{3}{4}$.

Спростіть вираз:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1 - 1 = 0$

б) $1 - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{tg\ \alpha} = 1 - \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

в)$1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 - (1 + 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha) = -2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

г) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

ґ) $tg\ \alpha\cdot ctg\ \alpha - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

д) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ctg\ \alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos^2\alpha$.

Доведіть тотожність:

а) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

б) $\frac{1+tg\ \alpha}{1+ctg\ \alpha} = \frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha\,(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha$

в) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

г) $\frac{ctg\ \beta - 1}{tg\ \beta - 1} = \frac{\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-1}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-1} = \frac{\cos\beta\,(\cos\beta-\sin\beta)}{\sin\beta\,(\sin\beta-\cos\beta)} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = -ctg\ \beta$.

Доведіть тотожність:

а) $\sin^3\alpha\,(1+ctg\ \alpha) + \cos^3(1+tg\ \alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$;

$$\sin^3\alpha\,(1+ctg\ \alpha) + \cos^3\alpha\,(1+tg\ \alpha) = \sin^3\alpha\cdot\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^3\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$= \sin^2\alpha\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha) + \cos^2\alpha\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha) = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$$
$$= 1\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha) = \sin\alpha+\cos\alpha.$$

Доведіть тотожність :

а) $\frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3} = ctg^2\alpha$;

$$\frac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3} = \frac{2\cos^2\alpha - 3(1-\cos^2\alpha) + 3}{2\sin^2\alpha - 3(1-\sin^2\alpha) + 3} = \frac{5\cos^2\alpha}{5\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha\ ;$$

б) $\mathbf{1+\frac{\cos\alpha\cdot tg^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}}$

$$\mathbf{1+\frac{\cos\alpha\cdot tg^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha+\cos\alpha\cdot tg^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha\,(1+tg^2\alpha)}{1+\cos\alpha}=}$$

$$\mathbf{=\frac{1+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}}.$$

Спростіть вираз:

а) $(tg\ \alpha+ctg\ \alpha)\cos^2\alpha=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\cdot\cos^2\alpha=$
$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=ctg\ \alpha$;

б) $1-\sin\beta\cos\beta\,tg\ \beta=1-\sin\beta\cos\beta\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=1-\sin^2\beta=\cos^2\beta$;

в) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\,(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha$;

г) $(tg\ \varphi+ctg\ \varphi)\sin\varphi\cos\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\sin\varphi\cos\varphi=$
$=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Тепер перевіримо, як ви засвоїли матеріал, в робочому зошиті пишемо

Самостійна робота

Варіант 1

1. Виразіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює даному числу:

а) $\frac{\pi}{5}$ б) $\frac{3\pi}{4}$ в) $\frac{2\pi}{9}$ г) $\frac{3\pi}{5}$

2. Спростіть вираз:

а) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}$

б) $\frac{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$

3. Знаючи, що $\sin\alpha=\frac{3}{7}$, обчисліть значення $\cos\alpha$, $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ за умови, що: $\mathbf{0}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Варіант 2

1. Виразіть у градусах кут, радіанна міра якого дорівнює даному числу:

а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{4\pi}{9}$ в) $\frac{2\pi}{5}$ г) $\frac{3\pi}{10}$

2. Спростіть вираз:

$$а)\ \frac{\cos^2\alpha - \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^4\alpha};$$

$$б)(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$$

3. Знаючи, що $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, обчисліть значення $\cos\alpha$, $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ за умови, що: $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} < \alpha < \boldsymbol{\pi}$.

Сьогодні на уроці ми вивчили співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу, сформували уміння застосовувати вивчені співвідношення для тотожних перетворень (спрощення) виразів, навчилися знаходити значення тригонометричних функцій за однією відомою функцією.

***Домашнє завдання:* вивчити конспект.**