

Усе пізнається у порівнянні

АРИФМЕТИЧНА ТА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ

Урок алгебри у 9 класі

Білан Віра Вікторівна, учитель-методист математики
Конотопського ліцею № 12
Конотопської міської ради Сумської області.

Актуалізація опорних знань

1. Дайте означення числової послідовності.
2. Наведіть приклади числових послідовностей.
3. Які види числових послідовностей ви знаєте?
4. Наведіть приклади скінченої, нескінченної, зростаючої, спадної числової послідовності
5. Якими способами можна задати числову послідовність?
6. Наведіть приклади послідовностей, заданої формулою n -го члена, рекурентною формулою.

7. Послідовність (x_n) задано формулою $x_n = n + 5$.

Укажіть перші три члена цієї послідовності. Чи є ця послідовність зростаючою? нескінченною?

8. Дано скінчену послідовність $(x_n) : 3; 0; -3; -6; -9; -12$

Укажіть:

1) перший, третій, шостий члени цієї послідовності;

2) чи є ця послідовність зростаючою, спадною?

3) формулу її n -го члена

9. Послідовність (a_n) задана формулою $a_n = 3n - 1$.

Укажіть:

1) a_1, a_5, a_6 ;

2) номер члена, який дорівнює 26;

3) чи є членом цієї послідовності число 47; 58?

Мета уроку.

Ввести означення арифметичної та геометричної прогресії, вивести формули загального члена, суми n -перших членів, довести властивості, навчитися застосовувати теоретичний матеріал при розв'язуванні задач.

Розвивати логічне мислення, вміння аналізувати ситуації, удосконалювати вміння порівнювати, спостерігати, відмічати закономірності, проводити міркування, формувати вміння будувати, інтерпретувати математичні моделі деяких ситуацій.

Виховувати наполегливість, відповідальність, творче ставлення до вирішення проблем, сприяти вихованню інтересу до вивчення математики, вчитися активно спілкуватися, аргументовано відстоювати свої погляди.

Арифметична прогресія

1) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

$$d = 2$$

2) $5, 8, 11, 14, \dots$

$$d = 3$$

3) $-1, -2, -3, -4, \dots$

$$d = -1$$

4) $-2, -4, -6, -8, \dots$

$$d = -2$$

Геометрична прогресія

1) $1, 2, 4, 8, \dots$

$$q = 2$$

2) $5, 15, 45, 135, \dots$

$$q = 3$$

3) $1; 0,1; 0,001; 0,0001; \dots$

$$q = 0,1$$

4) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$

$$q = \frac{2}{3}$$

d- різниця

q- знаменник

Означення

Числова послідовність

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$

називається

арифметичною

геометричною

прогресією

якщо для всіх натуральних n

виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad d \neq 0$$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad q \neq 1$$

Формула n-го члена прогресії

Нехай задані a_1 и d

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = \\ = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;$$

.....

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Нехай задані b_1 и q

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$$

$$b_4 = b_1 \cdot q^3$$

.....

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Нехай маємо
арифметичну
прогресію

1) 7, 10, 13, 16,
19, 22, 25...

$$d=3$$

2) 15, 13, 11, 9, 7,
5,...

$$d=-2$$

Нехай маємо
геометричну
прогресію

1) 4, 12, 36, 108,
324, 972,...

$$q=3$$

2) 128, 64, 32, 16,
8, 4,...

$$q=1/2$$

Властивості

$$d > 0$$

**Арифметична
прогресія
зростаюча**

$$d < 0$$

**Арифметична
прогресія
спадна**

$$q > 1$$

**Геометрична
прогресія
зростаюча**

$$0 < q < 1$$

**Геометрична
прогресія спадна**

Нехай маємо
арифметичну
прогресію

1) 7, 10, 13, 16, 19, 22,




2) 15, 13, 11, 9, 7, 5, ...



Нехай маємо
геометричну
прогресію

1) 1, 3, 9, 27, 81, 243



2) 1; 0,5; 0,25; 0,125



Характеристичні властивості

Арифметична
прогресія

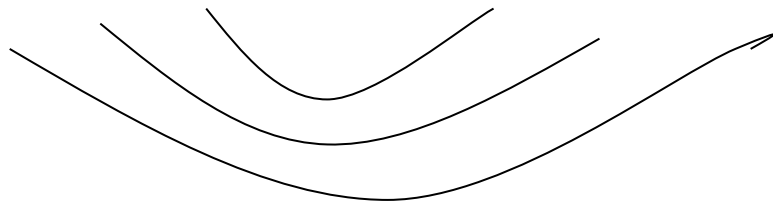
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Геометрична
прогресія

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Маємо
арифметичну
прогресію

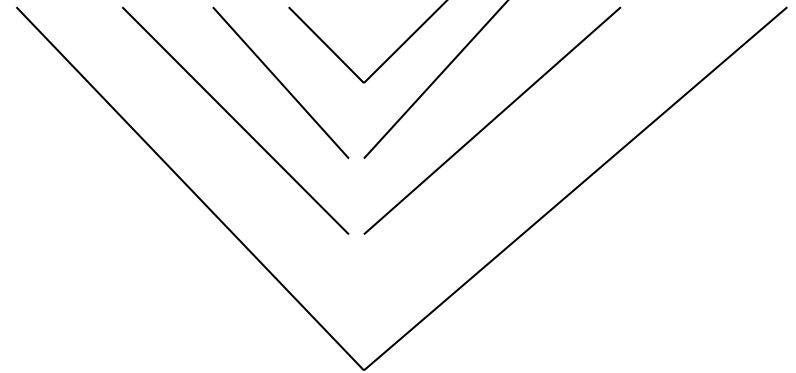
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15



16

Маємо геометричну
прогресію

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128



128

У скінченної

арифметичної прогресії

Сума двох членів, які
рівновіддалені від її
кінців дорівнюють
сумі крайніх членів
прогресії

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \\ = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

геометричної прогресії

Добуток двох членів, які
рівновіддалені від її
кінців дорівнюють
добутку крайніх членів
прогресії

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots$$

№ 1

Дано: $a_1 = 4$, $d = 0.4$

Знайти: a_3 , a_{11} , a_{32} .

№ 2

Дано: (a_n) , $a_1 = -6$,
 $a_3 = 12$

Знайти: a_2 , a_{12} .

№ 3

Дано: (a_n) ,
 $a_1 = 2$, $a_8 = -47$

Знайти: d .

№ 1

Дано: $a_1 = 4$, $d = 0.4$

Знайти: a_3 , a_{11} , a_{32} .

Розв'язання.

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \text{ Тоді } a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 0,4 = 4,8;$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 4 + 4 = 8;$$

$$a_{32} = a_1 + 31d = 4 + 12,4 = 16,4.$$

Відповідь. 4,8; 8; 16,4.

№ 2

Дано: (a_n) , $a_1 = -6$, $a_3 = 12$

Знайти: a_2 , a_{12} .

Розв'язання.

За характеристичною властивістю маємо:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2};$$

$a_2 = (-6 + 12) : 2 = 3$. Знайдемо d .

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-6) = 9;$$

$$a_{12} = a_1 + 11d = -6 + 99 = 93.$$

Відповідь. 3; 93.

№ 3

Дано: (a_n) , $a_1=2$, $a_8= -47$

Знайти: d .

Розв'язання.

$a_n=a_1+(n-1)d$. Тоді $a_8=a_1+7d$. Звідки $d= (a_8-a_1):7=(-47-2):7=-7$.

Відповідь. -7

№ 4

Дано: (b_n) , $b_6 = 8$, $q = -4$

Знайти: b_7

№ 5

Дано: (b_n) , $b_1 = 0,5$,
 $b_8 = 64$

Знайти: q

№ 6

Дано: (b_n) ,
 $b_4 = 9$, $b_6 = 25$

Знайти: b_5 .

№ 4

Дано: $b_6 = 8$, $q = -4$

Знайти: b_7 .

Розв'язання.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Тоді $b_7 = b_6 \cdot q$.

$$b_7 = 8 \cdot (-4) = -32$$

Відповідь. -32



№ 5

Дано: (b_n) , $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$

Знайти: q .

Розв'язання.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

$$\text{Тоді } b_8 = b_1 \cdot q^7$$

$$\text{Звідки, } q^7 = (b_8 : b_1) = 64 : \frac{1}{2} = 128 = 2^7$$

$$\text{Тоді } q = 2$$

Відповідь. 2



№ 6

Дано: (b_n) , $b_4=9$, $b_6=25$

Знайти: a_5

Розв'язання.

За характеристичною властивістю маємо:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$
$$b_5 = \sqrt{b_4 \cdot b_6} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15$$

Відповідь. 15.

СУМА n – ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ доданків}}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

СУМА n – ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1},$$

$$S_n q = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n,$$

$$S_n q - S_n = -b_1 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + b_1q^n,$$

$$S_n q - S_n = -b_1 + b_1q^n,$$

$$S_n (q - 1) = b_1 (q^n - 1),$$
$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{(q - 1)} \quad (q \neq 1).$$

СУМА n – ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ПРОГРЕСІЇ

Арифметична
прогресія

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрична
прогресія

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{(q - 1)} \quad (q \neq 1)$$

Задача

Для участі в міжнародному Математичному конкурсі «Кенгуру – математика для всіх» в міський оргкомітет необхідно подати заявку від школи. В перший день після зазначеного терміну заявки на участь подали 5 шкіл, на другий - 7, на третій - 9 ... Через скільки днів в оргкомітет буде подано 60 заявок (вважається, що отримана закономірність не буде порушена)? Скільки заявок надійде в останній день?(Відповідь. 6 днів, 15 заявок)

Визначення
арифметичної
прогресії

Формула n -го члена
арифметичної прогресії

Властивості кожного
члена арифметичної
прогресії

Формула суми n -перших
членів арифметичної прогресії

Формула різниці
арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Визначення
геометричної
прогресії

Формула n -го члена
геометричної прогресії

Властивості кожного
члена геометричної
прогресії

Формула суми n -перших
членів геометричної прогресії

Формула знаменника
геометричної прогресії

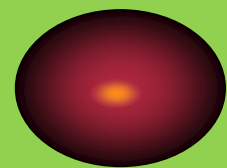
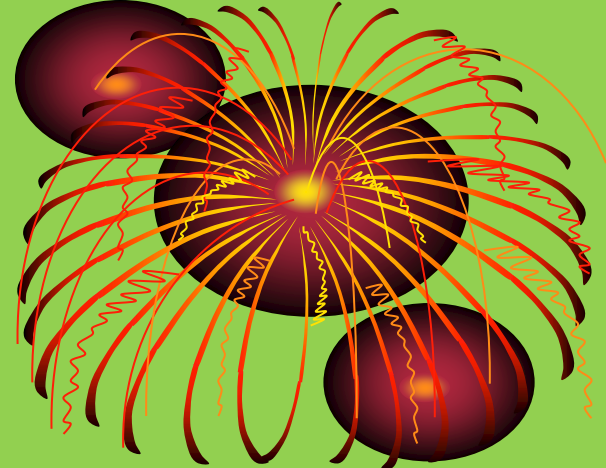
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$q = b_{n+1} : b_n$$



Бажаємо успіхів у навчанні