

ТЕМА ЗАНЯТТЯ: Похідна та її застосування

МЕТА ЗАНЯТТЯ:

- познайомити студентів із різними типами прикладних задач та методами їх розв'язування за допомогою похідної; формувати уміння застосовувати знання та способи дій у змінених і нових навчальних ситуаціях; поглибити знання студентів про моделювання процесів дійсності за допомогою апарата похідної; формувати навички дослідницької діяльності, публічних виступів, умінь самостійної роботи з літературою і Інтернет – ресурсами;
- розвивати пізнавальний інтерес, навички колективної праці;
- виховувати працьовитість, зібраність, організованість, увагу, відповідальність та вимогливість до себе.

Тип заняття: узагальнення та систематизації знань.

Методи: проблемно-пошуковий, дослідницький.

Методичне забезпечення: персональний комп'ютер, мультимедіа проектор, робочі зошити, буклет «Похідна. Теоретичні відомості», збірник прикладних екстремальних задач, презентації в форматі Power Point.

Хід заняття

1. Організаційний момент.

Перевірка готовності студентів до заняття, перевірка присутніх.

2. Перевірка домашнього завдання.

В кінці заняття збираються зошити з домашнім завданням.

3. Надання нового матеріалу

3.1. Мотивація навчальної діяльності.

«Будь – яка наука досягає вершин лише тоді, коли вона користується математикою» *К. Маркс*.

Уже досить тривалий час ми з вами вивчаємо похідну, і не тільки її красу з погляду математики, а й використання для розв'язання прикладних задач. Ви вивчили досить багато понять, щоб взятися за розв'язання більш складних

задач, наприклад задач на побудову графіка функції та екстремальних задач. Використовуючи схему дослідження функції, ми зможемо з легкістю впоратися з побудовою графіків будь-яких функцій, а знаючи правило відшукування найбільшого та найменшого значень функції на відрізку – розв'язувати задачі прикладного характеру. Таким чином, з'ясуємо, як похідна застосовується в архітектурі, економіці, фізиці, виробництві та побуті.

3.2. Актуалізація опорних знань.

(У кожного студента є інструкційна картка, в якій розміщена картка самоконтролю, де він за участь у кожному етапі заняття виставляє собі оцінку).

Для того, щоб розпочати подорожі з похідною, необхідно повторити теоретичний матеріал.

Проведемо його у формі «Мозкового штурму». *(Кожна правильна відповідь – 1 бал).*

1. Дайте означення похідної функції в точці. *(Похідна – це границя відношення приросту аргументу до приросту функції, за умови, що приріст аргументу прямує до нуля).*
2. У чому полягає геометричний зміст похідної? *(Похідна – це кутовий коефіцієнт дотичної графіка функції в точці).*
3. У чому полягає механічний зміст похідної? *(Швидкість – це похідна від шляху по часу).*
4. Що таке кутовий коефіцієнт прямої? *(Кутовий коефіцієнт прямої – це тангенс кута нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox).*
5. Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку? *(Знайти похідну функції, прирівняти її до нуля, знайти значення функції в отриманих точках та на кінцях проміжку і обрати з них найбільше та найменше)*

Робота студентів в інструкційних картках у тестовій формі (кожна правильна відповідь – 0,5 бала).

Таким чином ви повторили весь теоретичний матеріал, щоб сприймати інформацію, яку підготували 4 групи студентів: «Історики», «Науковці»,

«Дослідники», «Практики», що взяли участь у веб-квесті «Подорожі з похідною». Веб-квест стимулює до пошуку і відкриття нових знань, формує прагнення до самоосвіти. На веб-сайті «Подорожі з похідною» кожна група одержала завдання: опрацювати додаткову літературу, довідники, матеріали з мережі Інтернет та знайти у різних сферах задачі прикладного характеру, а також історичний матеріал щодо походження похідної. Працювали ви за певним планом. Зібраний матеріал ви оформили у вигляді творчих звітів. Зараз ми прослухаємо виступи кожної групи з результатами роботи над веб-квестом.

3.3. Сприймання і засвоєння нових знань.

Творчий звіт групи «Історики»

Нашій групі «Історики» було доручено з'ясувати, хто із вчених і коли ввів поняття «похідної». Працюючи над проектом «Історія виникнення похідної» ми зрозуміли що, слова П.Каруса *«Жодна інша наука не навчає так ясно розуміти гармонію природи, як математика..»* цілком правдиві.

Похідна – одне з фундаментальних понять математики. Воно виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю розв'язання ряду задач з фізики, механіки і математики, але в першу чергу для визначення швидкості прямолінійного руху і побудови дотичної до кривої.

Незалежно один від одного І.Ньютон і Г.Лейбніц розробили апарат числення, яким ми користуємося в даний час. Числення, створене Ньютоном і Лейбніцем, отримало назву диференціального числення. Але задовго до цього багато вчених розв'язували задачі, пов'язані з похідною.

Епізодично поняття дотичної зустрічалося в роботах італійського математика Ніколо Тарталії. В творі «Нова наука» він показав, що траєкторія польоту снаряда є крива лінія (парабола) і що найбільша дальність польоту снаряда відповідає куту 45° .

П'єр Ферма запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функцій, проведення дотичних до довільних кривих, що фактично спиралися на застосування похідних. У роботах Джеймса Грегорі

було розроблено методи розв'язання задач на відшукування миттєвої швидкості, використовуючи нескінченно малі величини. Розвиток цього методу привів до створення диференціального числення.

Ісаак Барроу розробив спосіб знаходження дотичних доволі близький до сучасних методів, що базувався на застосуванні диференціалів і тим самим встановив взаємну оберненість операцій диференціювання та інтегрування.

Ісаак Ньютон у праці "Метод флюкцій і нескінченні ряди" ввів поняття флюент (зростаючі величини) і флюкції (швидкість, за якою зростають внаслідок руху флюенти). Цей трактат був опублікований посмертно лише в 1736 р.

Готфрід Лейбніц в 1684 р. опублікував першу друковану працю про диференціальне числення під назвою «Новий метод максимумів і мінімумів, а також дотичних, для якого не є перешкодою дробові та ірраціональні кількості, і особливий для цього рід вираховування». У цій статті, що складається усього лише з 6 сторінок, міститься виклад суті методу обчислення нескінченно малих, зокрема викладаються основні правила диференціювання.

Йоганн Бернуллі розв'язав задачу Лейбніца про форму кривої, по якій важка точка опускається за рівні проміжки часу на рівні вертикальні відрізки. Ввів і проінтегрував диференціальне рівняння.

Гійом Лопіталь є автором першого підручника по математичному аналізу «Аналіз нескінченно малих». Йому належить розв'язання ряду задач, у тому числі задача про криву, по якій повинен рухатися вантаж, прикріплений до ланцюга, що утримує в рівновазі підйомний міст.

Леонарду Ейлеру належать твори про диференціальне і інтегральне числення, де розглядаються не тільки дані розділи математики, але і розвивається теорія звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь в частинних похідних.

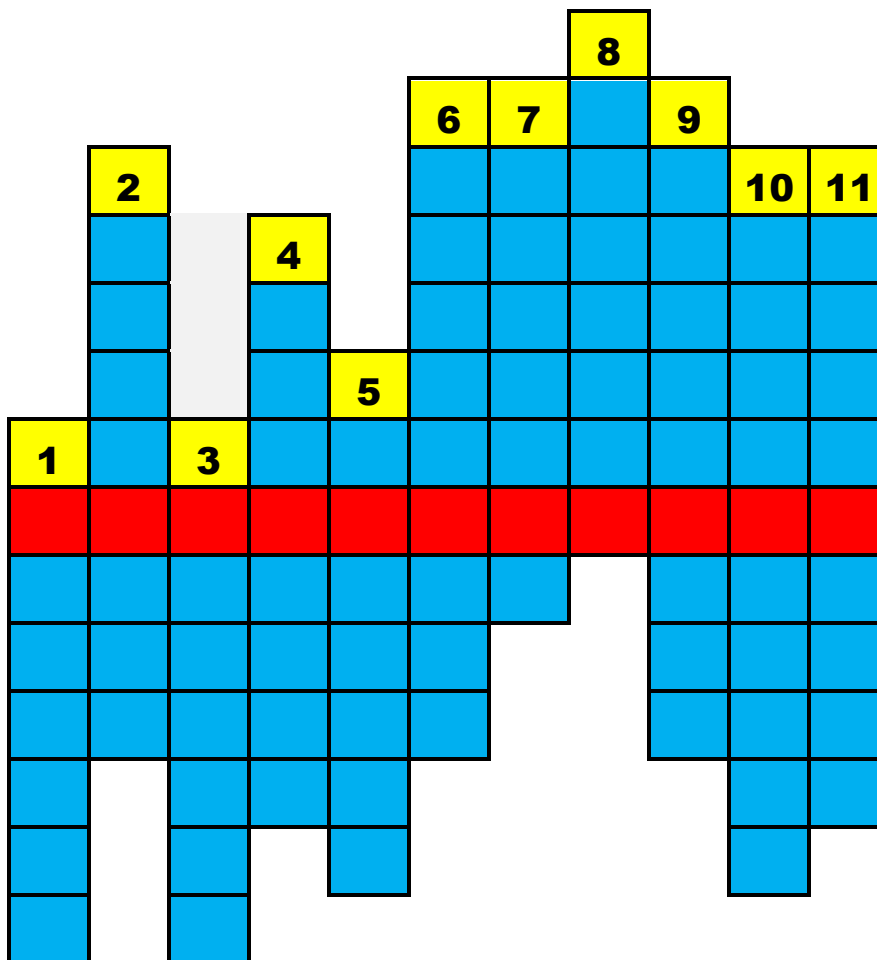
Жозеф Лагранж є автором класичного трактату «Аналітична механіка», в якому встановив фундаментальний «принцип можливих переміщень» і завершив математизацію механіки.

За допомогою диференціального числення було розв'язано багато задач теоретичної механіки, фізики, астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст.

Девізом багатьох математиків XVII століття був: «Рухайтесь вперед, і віра в правильність результатів до вас прийде!».

Творчий звіт групи «Науковці»

Наша група «Науковці» працювала під девізом *«...Математика – справа аж ніяк не тільки розуму, але також і фантазії...»*. Нам було доручено опрацювати теоретичні відомості про поняття похідної, її геометричного та фізичного змісту, правил диференціювання. Ми оформили їх у вигляді буклету та пропонуємо розгадати кросворд, розв'язавши який ви зможете дізнатися назву поняття, тісно пов'язаного з поняттям похідної, яке використовується для наближених обчислень значень функції. *За кожен правильну відповідь – 1 бал.*



Питання до кросворду

Кут її нахилу визначає геометричний зміст похідної. (*Дотична*).

Точка, “підозріла” на екстремум. (*Критична*).

Відповідність, при якій кожному числу x з множини D відповідає єдине число y , яке залежить від x . (*Функція*).

Точка-інтригантка, точка... (*Перегину*).

Що являє собою похідна за означенням? (*Границя*).

Найбільше чи найменше значення функції в точці. (*Екстремум*).

Синонім до поняття “диференціальне числення”. (*Похідна*).

Великий німецький вчений, філософ, математик. (*Лейбніц*).

Фізичний зміст похідної? (*Швидкість*).

Першим етапом дослідження функції є відшукування області... (*Визначення*).

Що досліджується за допомогою відшукування другої похідної? (*Опуклість*).

Творчий звіт групи «Дослідники»

Група «Дослідники» працювала під девізом «*Найкращий спосіб вивчити що-небудь – це відкрити самому*». Опрацювавши довідкову літературу та скориставшись пошуковими можливостями мережі Інтернет, ми склали план дослідження функції та з’ясували, за допомогою яких програм можна будувати та досліджувати графіки функцій.

Вивчення поведінки функцій та побудова їх графіків є важливим розділом математики. Вільне володіння технікою побудови графіків часто допомагає вирішувати багато задач, і іноді є єдиним засобом їх рішення.

Можна навести безліч прикладів, важливості вміння будувати графіки і описувати їх властивості. Учений-сейсмолог, аналізуючи сейсмограму, дізнається, коли був землетрус, де він відбувся, визначає силу і характер поштовхів. Лікар, що діагностує хворого, може за кардіограмою робити висновки щодо порушення серцевої діяльності. Інженер-радіоелектротехнік за характеристикою напівпровідникового елемента вибирає найбільш відповідний режим його роботи.

Більше того, разом з розвитком математики росте проникнення графічного методу в найрізноманітніші області життя людини. Зокрема,

використання функціональної залежності і побудова графіків широко застосовується в економіці. Таким чином зростає важливість вивчення даного розділу математики в коледжі, і особливо – важливості самостійної роботи над ним.

Серед найважливіших розподілів ймовірностей неперервних випадкових величин особливе місце посідає нормальний розподіл, який задається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a, σ – параметри розподілу.

Широкого поширення цей закон дістав у різних сферах виробництва при контролюванні якості продукції, тобто внаслідок неконтрольованих випадкових причин у виготовленої продукції трапляються відхилення від норми, які підпорядковуються нормальному розподілу.

При $a=0, \sigma=1$ отримують стандартний нормальний розподіл (розподіл Гаусса).

Ми провели повне дослідження функції щільності стандартного нормального розподілу:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

1. Область визначення функції – всі дійсні числа, тобто $D(x) = (-\infty; +\infty)$

2. $f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x).$

Отже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy .

3. Точки перетину з осями координат:

З віссю Ox : $y = 0$, тоді $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, x \in \emptyset$. Точок перетину з віссю Ox немає.

З віссю Oy : $x = 0$, тоді $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4$. $A\left(0; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ –

точка перетину з віссю Oy .

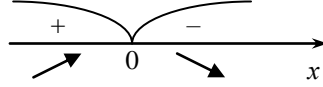
4. Знайдемо першу похідну функції:

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Прирівняємо похідну до нуля та розв'яжемо отримане рівняння:

$$-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

$x = 0$ – стаціонарна точка.



При $x \in (-\infty; 0)$ функція зростає, а при $x \in (0; +\infty)$ спадає. Отже, в точці $x = 0$ функція має максимум.

$$f_{\max} = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4.$$

5. Для відшукування проміжків опуклості функції знайдемо другу похідну:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = (-x)' \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1). \end{aligned}$$

Друга похідна дорівнює нулю в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.



Отже, на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$ графік функції опуклий вниз, а на інтервалі $(-1; 1)$ графік опуклий вгору.

$$f(-1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-1)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0,2$$

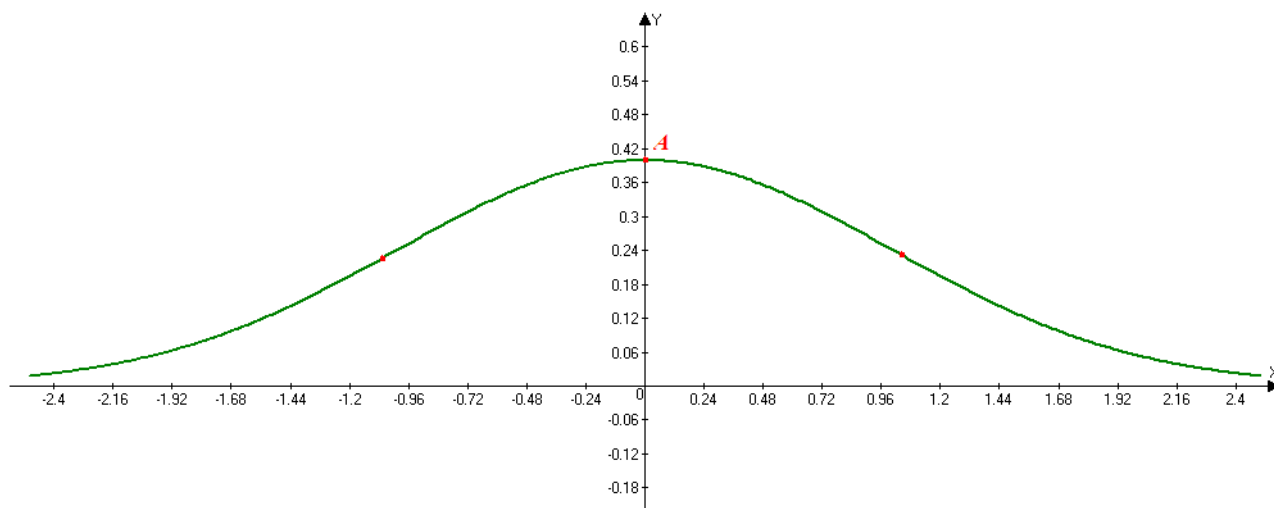
Звідси випливає, що в точках $(-1; f(-1))$ і $(1; f(1))$ графік функції має перегин.

6. Знайдемо параметри похилої асимптоти:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = 0, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Отже, пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою.

Графік функції має вигляд:



Серед комп'ютерних програм, що використовуються для побудови графіків різноманітних функцій, доцільно виділити наступні:

Advanced Grapher 2.2 – корисна і проста у використанні програма для побудови графіків і їх аналізу. Програма дозволяє будувати до 100 графіків в одному вікні. Обчислювальні можливості: регресійний аналіз, знаходження нулів і екстремумів функцій, точок перетину графіків, знаходження похідних, рівнянь дотичних і нормалей, чисельне інтегрування. Сайт програми: <http://www.alentum.com/agrapher/>

Графічна система DESMOS.COM/CALCULATOR – програма, що дозволяє будувати графіки функцій тільки в режимі онлайн, тобто без Інтернету її використовувати неможливо. Щоб запустити систему побудови графіків, необхідно просто зайти на сторінку <<http://desmos.com/calculator>>.

Якщо навести показчик миші на будь-яку точку вже побудованого графіка, то висвітяться її координати, а до точок екстремуму і нулів функції курсор мишки взагалі "намагнічується".

Система дозволяє не лише зберігати побудований графік функції у вигляді графічного файлу, а й поділитися Вашим графіком функції в Facebook або Twitter та поставити на будь-якому сайті посилання на графік функції.

Winplot є математичним інструментом для створення двовимірних і тривимірних графічних зображень різних функцій, рівнянь і нерівностей,

демонстрації ідей диференціального і інтегрального числення, побудови графіків розв'язків диференціальних рівнянь, моделювання руху планет (системи трьох тіл).

Сервіс **Grafikus** <http://grafikus.ru/> призначений для побудови графіків різних функцій в двовимірних і тривимірних координатах. Для цього достатньо задати вид функції і натиснути кнопку "побудувати графіки".

Творчий звіт групи «Практики»

Учасники групи «Практики» переконалися у справедливості слів Анатолія Франса *«Не достатньо знати, необхідно також застосовувати»*.

Ми одержали завдання: з'ясувати, як можна використати похідну для розв'язання прикладних задач. Опрацювавши довідкову літературу та скориставшись пошуковими можливостями мережі Інтернет, ми розробили збірник задач прикладного характеру. Пропонуємо зараз ознайомитися з ним та розглянути розв'язок двох цікавих задач.

Вже в глибокій давнині виникали ситуації, коли вимагалось вирішувати задачі на екстремум. Одна з перших, що дійшли до нас, задач подібного роду, пов'язана з легендою про заснування міста Карфагена. Як оповідає в «Енеїді» римський поет Вергілій, царівна Фінікії Дідона з невеликим загonom вірних їй людей залишила рідне місто Тир, рятуючись від переслідувань свого брата тирана Пігмаліона. Її кораблі відправилися на захід по Середземному морю і пливли, поки Дідона не уподобала зручне для поселення місце на африканському узбережжі, в нинішній Туніській затоці.

Фінікійців не дуже гостинно зустріли місцеві жителі, їх король Ярб прийняв коштoвності, запропоновані Дідоною для покупки землі, але рішуче заявив, що натомість він згоден поступитися їй лише клаптиком землі, «який можна обмежити бичачою шкурою». Царівна погодилася та наказала розрізати шкуру на дуже тонкі ремені і зшити їх. Отримавши, таким чином, тонкий, але дуже довгий ремінь, вона відгородила їм від берега значну територію.

Простодушний, але чесний Ярб не став відмовлятися від даного слова. А Дідона на цьому місці заснувала місто Карфаген. Легенда відносить події до 825 року до н.е. і нам, звичайно, судити про їх достовірність важко. Але для нас цікава математична задача, яку, мабуть, довелося вирішувати Дідоні. Припустимо, що довжина виготовленого тонкого ремня дорівнює 600 м. Тоді на сучасній мові задача Дідони формулюється так:

Задача 1. Одна сторона прямокутної ділянки землі примикає до берега моря, а три інші обгороджуються ремнем, довжина якого 600 м. Які повинні бути сторони цієї ділянки, щоб її площа була найбільшою?

Розв’язання. Нехай одна сторона прямокутника дорівнює x м, тоді інша сторона дорівнює $(600 - 2x)$ м. Площа прямокутника буде функцією від змінної x :

$$y = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2,$$

область визначення якої $(0; 300)$. Знайдемо найбільше значення цієї функції на проміжку $(0; 300)$.

Похідна цієї функції

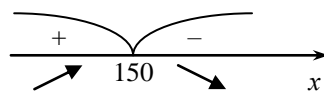
$$y' = 600 - 4x.$$

Критична точка знаходиться з рівняння

$$600 - 4x = 0$$

$$x = 150.$$

Досліджуємо знак похідної на кожному інтервалі



Оскільки під час переходу через точку $x = 150$ похідна змінює знак з плюса на мінус, то при $x = 150$ функція має максимум.

Отже, найбільшу площу має прямокутник із сторонами 150 м і 300 м. Знайдемо площу обгородженої ділянки землі $S = 45000 \text{ м}^2$.

Ми розв’язали задачу Дідони, вважаючи, що ділянка має форму прямокутника. Розв’язок подібних задач, якщо форма межі – крива лінія, призвело до створення нового важливого розділу математики – варіаційного

числення, в якому основним поняттям є не функція, а функціонал. В даний час цей розділ широко використовується в багатьох областях математики, фізики, техніки, будівництва, економіки.

Друга задача демонструє, як можна застосувати похідну для розв'язання задачі, що може постати перед будівельником.

Задача 2. Ширина будинку 6 м, довжина 9 м. Висота фронту 4,4 м. Господарю потрібно побудувати мансарду, поперечний переріз якої має найбільшу площу. Якими мають бути її розміри?

Розв'язання Нехай розміри шуканого прямокутника $OD = x$, $MN = y$.

Виразимо y через x та дані величини з

умови задачі:

$\triangle ABC$ подібний $\triangle MBN$,

$$\frac{AC}{MN} = \frac{BD}{BO},$$

$$\frac{6}{y} = \frac{4,4}{4,4 - x},$$

$$y = \frac{(4,4 - x) \cdot 6}{4,4}.$$

Складаємо опорну функцію:

$$S = xy = x \frac{(4,4 - x) \cdot 6}{4,4} = \frac{15}{11}(4,4x - x^2).$$

Потрібно знайти найбільше значення функції на інтервалі $[0; 4,4]$:

$$S' = \frac{15}{11}(4,4 - 2x),$$

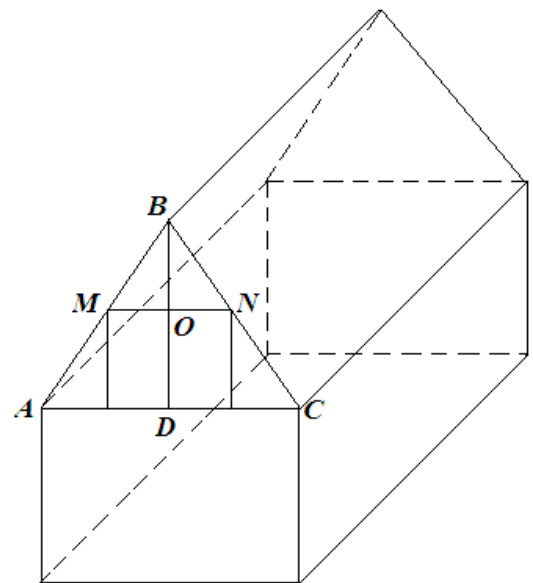
$$4,4 - 2x = 0,$$

$$x = 2,2.$$

$$S(0) = S(4,4) = 0; \quad S(2,2) = \frac{15}{11}(4,4 \cdot 2,2 - 2,2^2) = 6,6 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Отже, мансарда матиме найбільший поперечний переріз, якщо її розміри

будуть такими: висота – 2,2 м, ширина – $y = \frac{(4,4 - 2,2) \cdot 6}{4,4} = 3 \text{ м}$.



4. Підсумок заняття.

1. Які вчені є основоположниками диференціального числення?
2. В яких сферах діяльності використовується графічний метод?
3. Яким правилом потрібно користуватись при розв'язуванні екстремальних задач?
4. При вивченні яких дисциплін ви зможете користуватись похідною?

Оцінювання роботи студентів на занятті за картками самоконтролю

5. Домашнє завдання

Повторити теоретичний матеріал, готуватися до контрольної роботи.
Розв'язати задачі № 8, 23 збірника «Прикладні екстремальні задачі».

Використана література:

1. Бевз Г.П., Алгебра і початки аналізу. 10-11 кл. – К.: «Освіта», 2006. – 256 с.
2. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 11 класу. – К.: «Зодіак-Еко», 2002. – 315 с.
3. Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика. Пробний навчальний посібник для учнів шкіл, ліцеїв та гімназій гуманітарного профілю 10-11 кл. – К.: «Освіта», 2001. – 204 с.
4. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу 11 кл. – Х.: «Світ дитинства», 2007. – 246 с.

Тестове завдання

№	Функція	Похідна		Оцінка
1	$f(x) = \frac{x^8}{8}$	А) $\frac{x^7}{7}$; Б) x^7 ;	Б) $\frac{x^8}{7}$; Г) інша відповідь.	
2	$f(x) = 2 \sin x$	А) $\cos 2x$; Б) $-\cos 2x$;	Б) $2 \cos x$; Г) інша відповідь.	
3	$f(x) = 3x^2 - 5x + 6$	А) $5x - 5$; Б) $6x - 5$;	Б) $6x^2 - 5$; Г) інша відповідь.	
4	$f(x) = \operatorname{ctg} 2x$	А) $\frac{1}{2 \sin 2x}$; Б) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$;	Б) $-\frac{1}{2 \sin 2x}$; Г) інша відповідь.	
5	$f(x) = \sqrt{x}$	А) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; Б) $\frac{2}{\sqrt{x}}$;	Б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; Г) інша відповідь.	
6	$f(x) = \sin x - \cos x$	А) $-\sin x + \cos x$; Б) 0;	Б) $\cos x + \sin x$; Г) інша відповідь.	
7	$f(x) = (3x + 2)^{50}$	А) $150(3x + 2)^{49}$; Б) $150x$;	Б) $50(3x + 2)^{49}$; Г) інша відповідь.	
8	$f(x) = 5^x$	А) $x5^x$; Б) 5;	Б) $5^x \ln 5$; Г) інша відповідь	
9	$f(x) = e^{3-2x}$	А) e^{3-2x} ; Б) $2e^{3-2x}$;	Б) $-2e^{3-2x}$; Г) інша відповідь.	
10	$f(x) = \sqrt{\sin x}$	А) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; Б) $\sqrt{\cos x}$;	Б) $2\sqrt{\cos x}$; Г) інша відповідь.	
11	$f(x) = \cos^3 x$	А) $-3\cos^2 x \cdot \sin x$; Б) $3\cos^2 x$;	Б) $\sin^3 x$; Г) інша відповідь.	
12	$f(x) = \log_2 x$	А) $\frac{1}{x \ln 2}$; Б) $\frac{2}{\log_2 x}$;	Б) $2 \ln x$; Г) інша відповідь.	

Ключ до тестового завдання

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
В	Б	В	В	А	Б	А	Б	Б	А	А	А