«Предмет математики є настільки серйозним, що корисно не втрачати випадку зробити його трохи цікавішим»

Блез Паскаль

Тема уроку. Сума *n* перших членів геометричної прогресії

Мета уроку:

- ✓ *узагальнити поняття тем «Означення геометричної прогресії» та «Формула n-го члена геометричної прогресії»;*
- ✓ *домогтися засвоєння учнями формул для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії;*
- ✓ *відпрацювати вивчені формули для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії;*
- ✓ *формувати вміння аналізувати життєві фінансові ситуації, встановлювати системні зв'язки, виявляти проблеми, знаходити способи їх розв'язання, прогнозувати події;*
- ✓ *розвивати фінансову культуру та розширити обізнаність з певними економічними поняттями*

Тип уроку: *засвоєння знань*

Наочність та обладнання: *Wi-Fi, власні гаджети та калькулятори*

Хід уроку

І. Організаційний етап

Сучасне життя є своєрідною економічною школою. І людині слід бути обізнаною з певними економічними поняттями, розуміти, як вигідніше дати чи взяти гроші під відсотки, на який термін треба вкласти гроші, щоб їх сума значно збільшилась, або як вигідніше взяти позику в банку. Тож сьогодні ми здійснимо **подорож** у таємничий і цікавий світ фінансів.

II. Формулювання мети і завдань уроку

Оскільки застосування геометричної прогресії допомагають досить простими способами розв'язати окремі типи задач математики фінансів, то нам слід пригадати основні властивості геометричної прогресії

(*Учитель повідомляє тему, оголошує мету, ставить завдання уроку і проводить бесіду*)

Геометричною прогресією називається така послідовність чисел $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$, в якому кожне наступне число дорівнює попередньому помноженому на деяке число q, що називається знаменником прогресії.

Це означає, що $a_2=a_1 \cdot q,\ a_3=a_2 \cdot q,\ \ldots,\ a_n=a_{n-1} \cdot q$.

Тоді n-й член геометричної прогресії подається через перший член і степінь знаменника: $a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$.

III. Засвоєння нових знань

(*Учням пропонується розгорнути підручник й опрацювати самостійно матеріал виведення формули суми перших n членів геометричної прогресії).*

Розглянемо скінченну геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$. Суму членів цієї прогресії позначимо S_n. Маємо:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Перепишемо рівність (*) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Знайдемо різницю $S_nq - S_n$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr} - & S_nq = & & b_1q & + b_1q^2 & + b_1q^3 + & \ldots & + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\ & S_n = & b_1 + & b_1q & + b_1q^2 & + b_1q^3 + & \ldots & + b_1q^{n-1} \\ \hline & S_nq - S_n = & -b_1 + & 0 & + \ 0 & + \ 0 \ + & \ldots + & 0 \quad + b_1q^n \end{array}$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$. Звідси $S_n(q-1) = b_1(q^n-1)$.
При $q \neq 1$ отримуємо:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$$

(*Учитель узагальнює та коментує формулу суми n перших членів геометричної прогресії*)

Цю рівність називають **формулою суми *n* перших членів геометричної прогресії** зі знаменником, відмінним від 1.

В багатьох задачах ми зустрічаємося з фінансовою операцією, яку називають ***ануїтетом***, що означає здійснення однакових платежів через рівні проміжки часу. Остаточна сума складається з всіх платежів плюс складні відсотки, що нараховуються на ці платежі.

IV. Розв'язування вправ

Задача 1. Нехай щорічно протягом 6 років робляться внески в розмірі 100 грн. Якою буде загальна сума, якщо відсоткова ставка становить 7% річних?

Розв'язання: Якщо позначити остаточну суму через S, то можна записати
$S=100+100\cdot(1+0{,}07)+100\cdot(1+0{,}07)^2+100\cdot(1+0{,}07)^3+100\cdot(1+0{,}07)^4+100\cdot(1+0{,}07)^5$

Підраховуючи складні відсотки від кожного платежу і додавши одержані числа, маємо: S=715,33(грн.)

Але існують досить прості способи розв'язання подібних задач.

В цьому прикладі a_1=100, q=1,07; n=6, $S_n=S$,

Підставимо ці значення у формулу для суми геометричної прогресії, одержимо:

$$S = \frac{100 \cdot (1{,}07^6 - 1)}{1{,}07 - 1}$$

Отже, результат одержимо той же. Але перевага використання формули для обчислення суми полягає в тому, що, наприклад, при n=1000 обчислення не ускладняться.

Корисно отримати формулу для обчислення платежів ануїтету в загальному вигляді.

Якщо позначити періодичні платежі через R, число платежів – n, а щорічну ставку відсотка – i, то

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(*Учням пропонується самостійно вивести формулу для обчислення суми аную́їтету*). Звідси $R = S \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$

Задача 2. Керівництво фірми вважає, що через п'ять років для заміни частини обладнання потрібна сума у розмірі 10000 грн. Якими повинні бути щомісячні платежі, якщо процентна ставка становить 6% річних.

Розв'язання: В даному випадку S=10000, $i = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\% = 0{,}005$; n=5·12=60

Підставимо числові значення у формулу:

$$R = S \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \ ,$$

одержимо:

$$R = 10000 \cdot \frac{0{,}005}{(1+0{,}005)^{60} - 1} = 143{,}33$$

Це і є величина щомісячних платежів.

Розглянемо ще одну задачу пов'язану з регулярними виплатами.

Задача 3. Для придбання автомобіля в банку береться 5000 з терміном погашення кредиту 3 роки і процентною ставкою 12% річних.

Якими повинні бути щомісячні платежі, якщо вони однакові.

Розв'язання: Тут P – величина кредиту (P=5000), r – процентна ставка на рік (r=12%), але враховуючи, що на рік діє 12 конверсійних періодів, то ставка відсотка за конверсійний період *(i)* становить $\frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01$, а n – загальна кількість платежів (n = 3·12=36)

Так як величина кредиту P дорівнює сумі щомісячних внесків P_n - частина внеску що забезпечує n-у виплату

$$P_n = \frac{R}{(1+i)^n} = R \cdot (1+i)^{-n} ,$$

то одержимо

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n, \text{ або}$$

$$P = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot (1+i)^{-2} + \ldots + R \cdot (1+i)^{-n}$$

Підставимо у формулу для суми членів геометричної прогресії $a_1 = R \cdot (1+i)^{-1}$, $q = (1+i)^{-1}$, одержимо $P = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Звідки

$$R = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Підставимо числові значення: P=5000; r=12%; $i = \frac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01$; n=3·12=36

За допомогою мікрокалькулятора неважко знайти результат:

$$R = 5000 \cdot \frac{0,01}{1-(1+0,01)^{-36}} \approx 166,07$$

(*Учитель пропонує учням зробити висновки щодо суми переплати загальної суми виплат відносно початкової вартості автомобіля*)

Загальна сума платежів становить 36·166,07=5978,52 (у.г.о.), вартість самого автомобіля, яка становить 5000 у.г.о., тоді 5978,52-5000=978,52(у.г.о.) є *“зацікавленістю”* банку в кредитуванні.

V. Узагальнення і систематизація знань

Використовуючи власні гаджети, перейдіть на сайт **joinmyquiz.com**, введіть код приєднання (*пропонує учитель*) та пройдіть тест.

VI. Підсумки уроку та оцінювання роботи учнів на уроці

Наведені приклади не охоплюють всю багатогранність фінансових розрахунків, але дозволить оцінити корисність такого математичного поняття, як геометрична прогресія.

Набуті знання дозволять аналізувати життєві фінансові ситуації, встановлювати системні зв’язки, виявляти проблеми, знаходити способи їх розв’язання, прогнозувати події у будь-якій сфері економіки, оскільки фінанси – це кров підприємства, носій його господарського життя.
(*Учитель проводить контрольно-оціночну діяльність*)

VII. Домашнє завдання

- Виведіть **формулу** суми *n* перших членів геометричної прогресії, скориставшись формулою розкладання на множники двочлена $a^n - b^n, n \in \mathbb{N}$
- Розв’яжіть задачу:

  Задача 4. Знайти “зацікавленість” банка у кредитуванні клієнта на суму 10000 грн., при 9% річних на термін 5 років з щоквартальним погашенням боргу рівними внескамЬ