ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ФІЗИЧНИХ ТІЛ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Представлена робота є частиною серії робот автора щодо використання математичних методів розв'язування фізичних задач у середній школі та середніх спеціальних учбових закладах (див. журнал «Відкритий урок…» № 4 за 2013р.,№12 за 2013р.). ЇЇ розроблено у вигляді методичних вказівок щодо отримання учнями стійких навичок використання інтегрального методу у розрахунку значення фізичної величини. Зокрема, у роботі розглянуто варіативні способи визначення моментів інерції фізичних тіл та геометричних фігур, що є неодмінною частиною удосконалення умінь та знань з теми «Динаміка обертального руху».

У роботі розглянуто кілька типів моментів інерції, що використовуються відокремлено у різних дисциплінах фізичного напрямку. Дуже важливим є винайдений математичний та змістовний зв'язок між моментом інерції фізичного тіла та осевим і полярним моментами інерції . Такий зв'язок дає можливість спростити математичні операції інтегрування та знижує рівень складності завдання на отримання результату.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ

Момент інерції j точки масою $\mathbf{m}$ є фізична величина, що визначається, відповідно до основного закону динаміки обертального руху, як відношення моменту M сили F, що діє на точку, до кутового прискорення β відносно вісі обертання, яке отримує точка у результаті дії такої сили [1] :

$$\frac{M}{\beta} = j \qquad (1).$$

З іншого боку, кінематичне рівняння обертального руху має вигляд:

$$M = F \cdot R = m \cdot \frac{\Delta w}{\Delta t} \cdot R^2 = m \cdot \beta \cdot R^2 \qquad (2),$$

де w – кутова швидкість точки, t – час , R – відстань від точки до вісі обертання.

Порівнюючи вирази (1) та (2), маємо для моменту інерції точки масою m:

$$j = m \cdot R^2 \qquad (3).$$

Маса $м$ фізичного тіла складається із елементарних мас dm, таким чином, що $м = \sum dm$. При цьому момент інерції тіла J_y відносно осі обертання $ОУ$ (рис.1) буде розраховано шляхом додавання елементарних моментів інерції dj_y точок тіла:

$$J_y = \sum dj_y = \sum x^2 \cdot dm \qquad (4),$$

де x – відстань точкової маси dm від осі обертання.

Момент інерції фізичного тіла J залежить від розподілу маси тіла $м$ відносно осі обертання, або є функцією такого розподілу. Поняття диференціалу функції [2] дає можливість отримати диференціальне рівняння моменту інерції фізичного тіла з неперервним розподілом маси відносно осі обертання :

$$J_y = \int dj_y = \int x^2\, dm \qquad (5).$$

Відомо, що фізичні тіла мають особливу точку C – *центр мас* (*центр тяжіння*), до якої прикладена сила тяжіння, що діє на тіло масою $м$, яка є сумою сил тяжіння усіх точкових мас фізичного тіла. Через центр мас C (рис.2) можливо провести необмежену кількість осей обертання тіла, але відносно двох окремих перпендикулярних осей тіло буде мати найменший $J_{min} = J_x$ (відносно осі X) та найбільший $J_{max} = J_y$ (відносно осі $У$) моменти інерції. Такі осі мають назву головних осей інерції, оскільки відносно них може підтримуватись стійке обертання вільного (незакріпленого) тіла [3], наприклад, обертання у польоті кинутого стрижня.

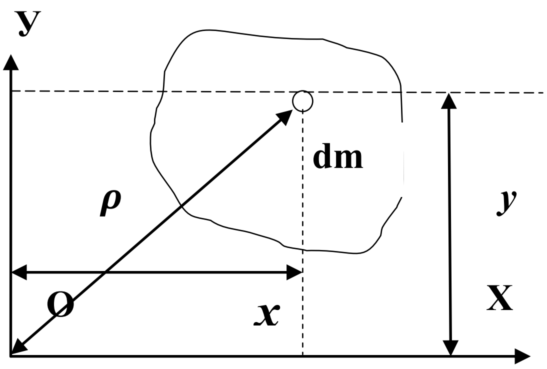

Рис.1. Координати x,у та полярна координата ρ точкової маси dm відносно осей обертання У, Х та центру відліку О.

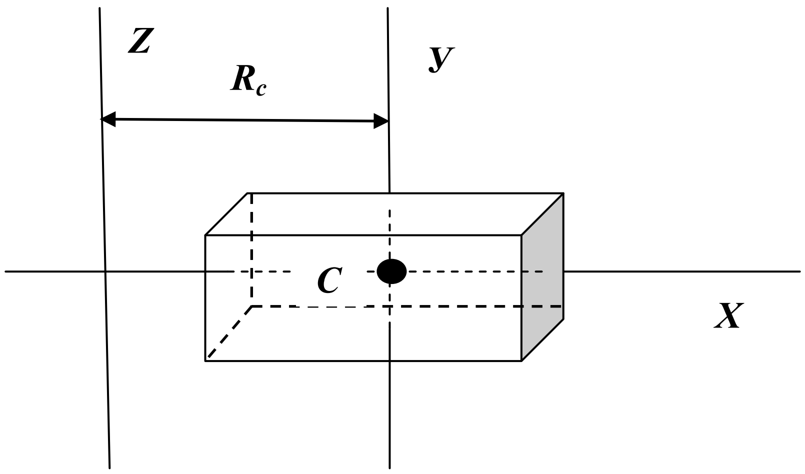

Рис.2. Головні (X , У) та зміщена (Z) осі обертання фізичного тіла.

Момент інерції J_z тіла, що обертається навкруги вісі Z, яка зміщена паралельним переносом на відстань R_c від головної осі $У$ (див.рис.2), розраховується за теоремою Гюйгенса – Штейнера [3]:

$$J_z = J_y + м \cdot R_c^2 \quad (6).$$

Звертає увагу на себе той факт, що у разі розрахунку моменту інерції $d\,j$ відповідно до виразу (3) елементарної частинки масою m плоскої фігури сталої товщини із рівномірним розподілом маси, густина ρ та параметр товщини D впливають на результат розрахунку лише у вигляді сталого множника $\rho{\cdot}D$:

$$j = dm \cdot R^2 = \rho \cdot D \cdot ds \cdot R^2 \qquad (7),$$

де ds - площа обраної елементарної частинки фігури.

Треба зауважити, що добуток $S \cdot x^2 = J_y^S$ у курсі спротиву матеріалів має назву *осевого моменту інерції площі* S відносно вісі обертання Y (рис.1) [4], який залежить лише від геометричних особливостей фігури. Розрахунок J_y^S можна провести розбиваючи плоску фігуру на елементарні площинки ds , що відповідають положенню точкових мас dm (рис.1), та проводячи інтегрування :

$$J_y^S = \int x^2 ds \qquad (8).$$

Таким чином, зв'язок моменту інерції плоскої фігури J_y та осевого моменту площини цієї фігури J_y^S встановлюється через множник ρD :

$$J_y = \rho \cdot D \cdot J_y^S \qquad (9).$$

ВИЗНАЧЕННЯ ОСЕВИХ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ПЛОСКИХ ФІГУР

Плоский прямокутник довжиною h та шириною b має осевий момент інерції J_x^S відносно осі X, що проходить вздовж однієї із сторін прямокутника (рис.3).

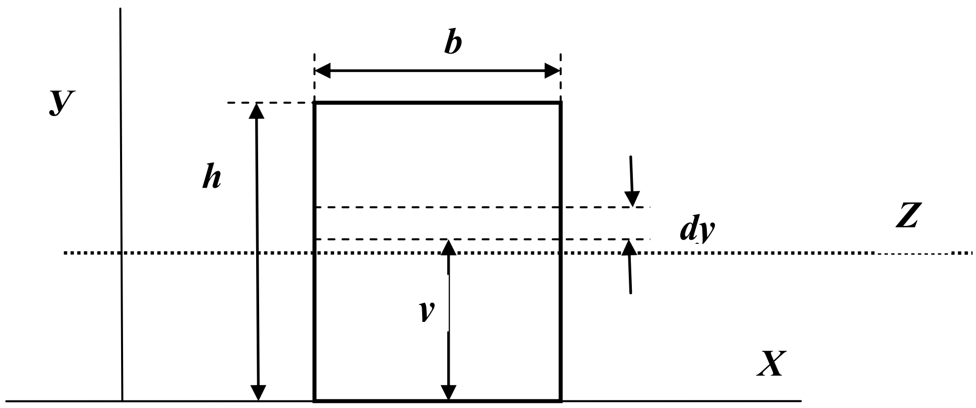

Рис.3. Щодо визначення осевого моменту інерції прямокутника.

Для його визначення на прямокутнику виділяємо елементарну смугу , що має площу $ds = b\ dy$, та використовуємо рівняння (8):

$$J_x^S = \int_0^h b \cdot y^2 \cdot dy = b\frac{y^3}{3}\ \Big|_0^h = b\,\frac{h^3}{3} \qquad (10).$$

Осевий момент інерції J_Z^S того ж прямокутника відносно осі Z, що проходить через центр прямокутника паралельно осі X, може бути розраховано зі зміною меж інтегрування відносно вісі Z :

$$J_Z^S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \cdot y^2 \cdot dy = b\frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\frac{h^3}{12} \qquad (11).$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера для розглянутого прямокутника має вигляд:

$$J_x^S = J_Z^S + S\left(\frac{h}{2}\right)^2 = b\frac{h^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = b\frac{h^3}{3} \qquad (12).$$

Осевий момент інерції трикутника(рис.4) відносно осі X, що проходить через вершину трикутника паралельно його основі довжиною b, визначається після виділення безкінечно малих за розмірами смуг шириною dy та довжиною x, що матимуть свої значення осевих моментів інерції dj_x^S . Значення x отримується по відношенню сторін подібних трикутників: $\frac{x}{y} = \frac{b}{h}$.

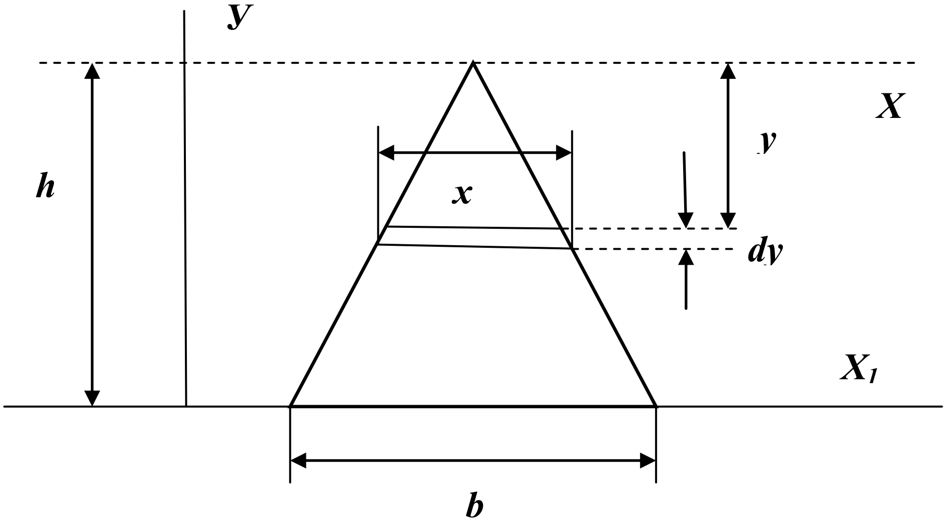

Рис.4. Щодо визначення осевого моменту інерції трикутника.

Осевий момент інерції трикутника відносно осі X визначається згідно виразу (8):

$$J_x^S = \int_0^h dj_x^s = \int_0^h y^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot y dy = \frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4} \qquad (13).$$

Осевий момент трикутника відносно осі X_1 (рис.4) , що співпадає із стороною трикутника, буде відрізнятися значенням $x = \frac{b}{h}(h - y)$, оскільки відлік значення y треба вести відносно осі X_1:

$$J^S_{x_1} = \int_0^h y^2\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = \frac{bh^3}{12} \qquad (14).$$

Для розрахунку осевого моменту J^S_x круглого диску радіусом r (рис.5) відносно осі X , що проходить через його центр, розбиваємо пластину на паралельні відносно осі X смуги із безкінечно малими площами $dS = x\ dy$. Шляхом додавання осевих моментів смуг $dj_x^s = y^2\ dS$ отримаємо значення J_x^s. Очевидно (див.рис.5), що величини x та y мають бути виражені через кут φ та радіус кола r :

$$x = 2r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi;\ dy = r\cos\varphi\, d\varphi;\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \qquad (15).$$

Визначення осевого моменту інерції ведеться із урахуванням виразів (15):

$$J^S_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^4\ \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = 2r^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$
$$\frac{1}{2}r^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}\ r^4\left(\varphi\ \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi r^4}{4} \qquad (16).$$

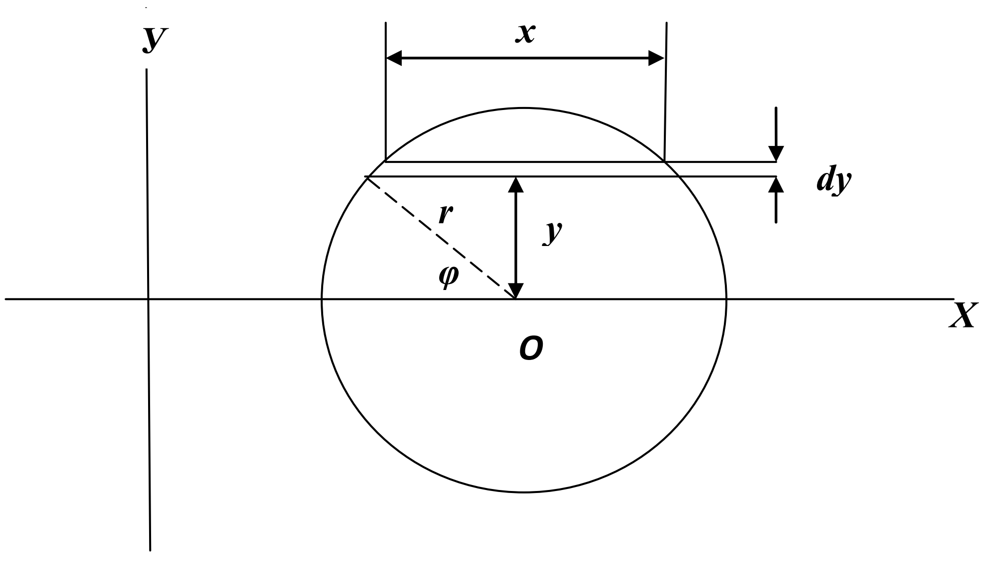

Рис. 5 . Щодо визначення осевого моменту інерції плоского диску.

Такий же результат можна отримати, скориставшись поняттям *полярного моменту інерції площини відносно центру обертання* $\boldsymbol{O}$ (див.рис.1):

$$J_p = \int_S \rho^2 dS = \int_S (x^2 + y^2)dS = J^S_x + J^S_y \qquad (17).$$

Очевидно, у силу симетричності,витікає рівність за значеннями $J^S_x = J^S_y$ для двох центральних осей диску. Таким чином, полярний момент інерції J_ρ диску буде у два рази більшим ніж осеві моменти. Для визначення полярного моменту інерції J_ρ диску відносно точки його центру O на тілі диску (рис.6) виділяється кільце безкінечно малої ширини $d\rho$, що матиме площу $dS=2\pi\rho d\rho$.

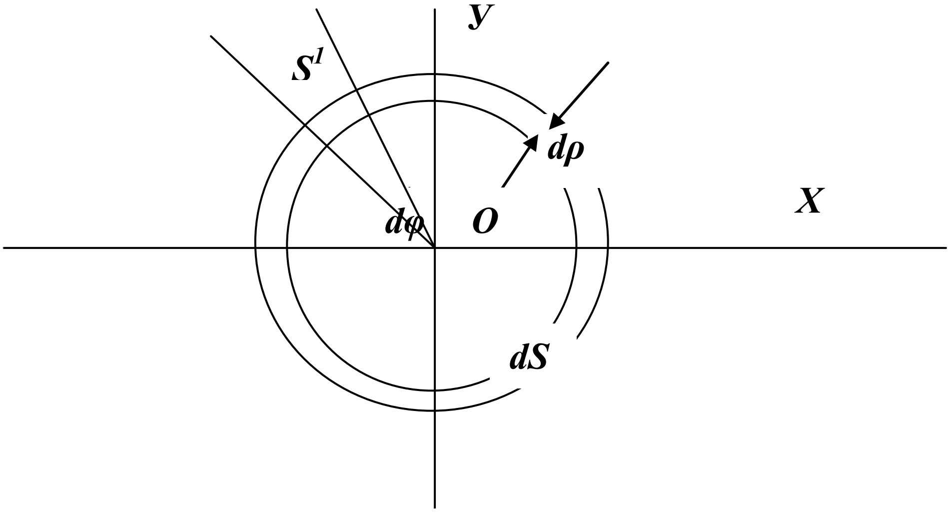

Рис. 6 . Щодо визначення полярного моменту інерції плоского диску.

Додаванням полярних моментів інерції кілець отримаємо значення полярного моменту усього диску:

$$J_\rho = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi r^4}{2} \qquad (18).$$

Таким чином, отримуємо значення осевих моментів диску відносно осей X та $У$ відповідними до результату обчислень (16), а саме $J^S_x = J^S_y = \frac{1}{2} J_\rho = \frac{\pi r^4}{4}$.

МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ФІЗИЧНИХ ТІЛ

Моменти інерції фізичних тіл із рівномірним розподілом маси можна обчислити користуючись виразом (9). Для прямокутної пластини відносно осі X (див.рис.3), маючи результат (10), отримаємо:

$$J_x = D \cdot \rho \cdot b\frac{h^3}{3} = \frac{\mathrm{M}h^2}{3} \qquad (19),$$

де M – маса пластини.

Для трикутної пластини (рис.4), вважаючи площу трикутника $S = \frac{1}{2} bh$, маючи результат розрахунку (13), отримаємо момент інерції відносно осі X:

$$J_x = D \cdot \rho \cdot b\frac{h^3}{4} = \frac{Mh^2}{2} \qquad (20).$$

Для круглого диску (рис.5,6) отримаємо момент інерції відносно центральної вісі X:

$$J_x = D \cdot \rho \cdot \frac{\pi r^4}{4} = \frac{Mr^2}{4} \qquad (21).$$

Спираючись на результат визначення полярного моменту інерції площі диску відносно точки O центру диску(18), можна отримати момент інерції фізичного тіла циліндричної форми радіусом r із рівномірним розподілом маси відносно осі обертання O помноживши J_ρ на товщину диску D (висоту циліндру h) та густину речовини ρ :

$$J_o = J_\rho \cdot D \cdot \rho = \frac{Mr^2}{2} \qquad (22).$$

Для порівняння, визначення моменту інерції суцільного циліндру можна почати з виділення безкінечно малої площини $dS^1 = ydyd\varphi$, що представлена на рис. 6 сегментом стрічки. Маса виділеної у циліндрі частинки $dm = \rho h dS^1$, а її момент інерції $dj_o = y^2\ dm$. У такому разі інтегрування потрібно проводити за двома параметрами і визначати подвійний інтеграл:

$$J_o = \iint_{0\ 0}^{r\ 2\pi} \rho\, h\ y^3 dy d\varphi = \frac{1}{2}\ \pi\rho h r^4 = \frac{Mr^2}{2} \qquad (23).$$

Можна відзначити, що результати (22) та (23) однакові.

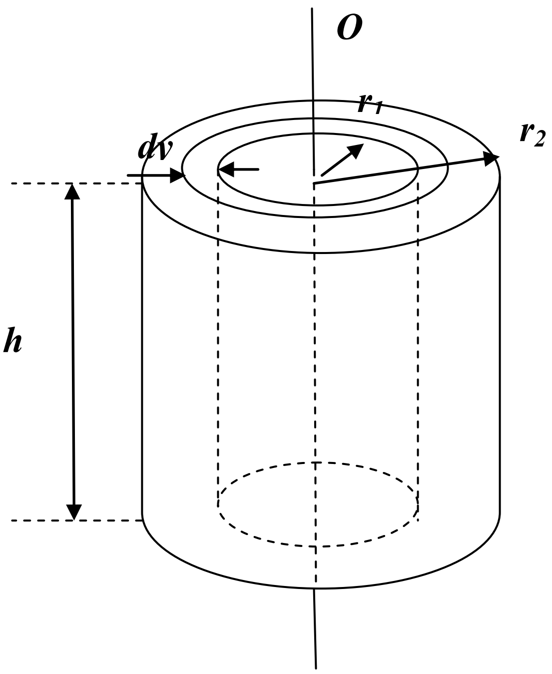

Рис.7. Щодо визначення моменту інерції полого циліндру.

Момент інерції полого циліндру (труби) J_o відносно осі обертання O (рис.7) визначається методом розбивання циліндру на тонкостінні циліндрики радіусами y з шириною стінки dy та додавання їх моментів інерції dj_o інтегруванням. Відстань y стінок циліндру від осі O дорівнює значенням r_1 та r_2 . Вони встановлюють межі інтегрування. Торцеві кільця циліндриків мають площу $dS = 2\pi y dy$. Момент інерції тонкостінного циліндрику $dj_o = y^2 dm = y^2 \rho h\ dS$. Значення визначеного інтегралу дає результат:

$$J_o = 2\pi\rho h \int_{r_1}^{r_2} y^3\ dy = \frac{1}{2}\ \pi\rho h\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{M}{2}\left(r_2^2 + r_1^2\right) \tag{24}$$

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Никитин Е.М. Теоретическая механика для техникумов. – М.: Наука, Главная редакция физико – математической литература, 1983. – 336с.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по матанализу. – М.: Высшая школа, 1966. – 461с.
3. Кухлинг Х. Справочник по физике. Под ред.Лейкина Е.М. – М.: Мир, 1980. – 519с.
4. Никифоров С.Н. Сопротивление материалов. Изд.4 – е. – М.: Высшая школа, 1966. – 583с.