КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД ОСВІТИ
«СЕРЕДНЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНЯ ШКОЛА № 19»
ДНІПРОВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ

УРОКИ ФІЗИКИ У 11 КЛАСІ

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Автор : учитель вищої категорії
Сидоренков Євген Єгорович

ДНІПРО - 2017р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Фізика та математика у школі та ВНЗ вивчаються як окремі дисципліни за планами, що складені відповідно до вимог нормативно-методичних документів. Терміни вивчення у школі таких розділів математики, як «Похідна функції» та «Невизначений інтеграл» є такими, що не залишають учням достатнього часу для набуття стійкого уміння використовувати свої знання математики для рішення фізичних задач [1]. Можливість практичного використання своїх знань матаналізу учні, а потім і студенти, отримують лише, вивчаючи теоретичну механіку, електротехніку, опір матеріалів та інші дисципліни, на старших курсах ВНЗ. Таким чином, спостерігається відсутність «освітнього простору» для формування у учнів навичок розв’язування фізичних задач методами інтегрального та диференціального обчислення у школі та на 1-2 курсах ВНЗ.

Разом з тим, використання своїх знань математики у рішенні фізичних задач - це справжнє задоволення для учня або студента, такий процес викликає емоційний підйом, збільшує повагу до себе як суб’єкта освітнього процесу[2]. Не слід забувати і суто історичні аспекти виникнення та розвитку математики як прикладної науки.

Зважаючи на вищевказане, автори ставлять собі за мету розробити цикл факультативних уроків на тему: «Диференціальний та інтегральний методи розв’язування фізичних задач у середній школі». Такі уроки нададуть можливість учням оволодіти стійкими навичками прикладного використання елементів диференціального та інтегрального обчислення.

Факультативні уроки розробляються за формою методичних вказівок [3] та тренувальних вправ. Типові задачі розподіляються за методами розв’язування, а не за розділами фізики. Така класифікація задач надає можливість оцінити універсальність використання математичних методів.

Сидоренков Є.Є.

Фізика. 11 клас

Факультативне заняття №1

Тема: Інтегральний метод (ІМ) розв'язування задач.

Мета: Ознайомитись з (ІМ), сформувати навички використання ІМ при розв'язуванні типових фізичних задач.

Тип уроку: Закріплення знань, формування умінь і навичок.

Теоретичні відомості про ІМ.

Інтегральний метод не є абсолютним у своєму використанні . Як відомо, не є абсолютним і зміст фізичних законів і вони також мають межі свого використання. За допомогою ІМ можливо подовжити межу використання фізичного закону, змінивши форму запису. Така дія можлива при виконанні двох умов: можливість представлення закону у диференціальній формі та можливість використання принципу суперпозиції (аддитивності) до розглянутих фізичних величин [4].

Суттєвий зміст ІМ полягає у наступному.

Припустимо, що маємо фізичний закон або визначення пропорційної залежності фізичних величин (закон Гуку, Ома для ділянки електричного кола, визначення сили струму, роботи тощо):

$$\boldsymbol{A = F \cdot s} \qquad (1),$$

де ***A, F, s*** - фізичні величини.

Умовою використання такої залежності має бути: ***F=const***. Як розширити межі використання залежності (1) при невиконанні такої умови, якщо маємо функціональну залежність F(s) ≠ const, як показано на рис.1.

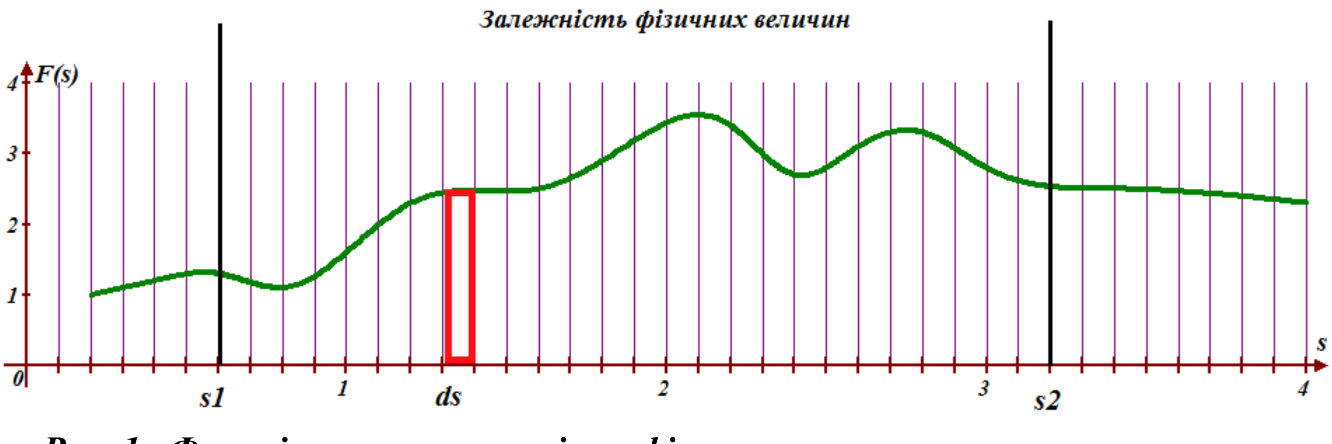


Рис. 1. Функціональна залежність фізичних величин.

Виділяється малий інтервал зміни фізичної величини s, який позначаємо ds, на якому фізична величина F=const відповідає вимогам щодо використання рівняння (1). При використанні (1) на інтервалі ds маємо зміну фізичної величини A :

$$\boldsymbol{dA = Fds} \qquad (2).$$

За принципом суперпозиції додаємо частки ***dA*** на усіх ділянках ***ds*** від s_1 до s_2 (дивись рис.1):

$$A=\int_{s1}^{s2} Fds \qquad (3).$$

Таким чином, маємо два етапи використання ІМ:

1). Отримання виразу для диференціала фізичної величини dA шляхом розбивання фізичного процесу на малі проміжки (часу, частинки тіла або простору) ds, на яких процес можна розглядати як квазістаціонарний або рівномірний;

2). Додавання або інтегрування.

Найбільш важливим є здібність учня визначити змінну величину, за якою буде відбуватися інтегрування, а також значення меж інтегрування.

Після визначення інтегралу отримують значення фізичної величини, що розраховується .

Використання методу.

Розглянемо рішення відомої з восьмого класу задачі : *визначити роботу, що виконується при забиванні цвяха довжиною s=10 см у дошку товщиною L=30 см, якщо при витягуванні забитого цвяха з дошки треба на початку прикласти силу F_0 =40 Н.*

Розв'язування задачі у восьмому класі відбувалось графічним способом: оскільки сила тертя дорівнює силі, що діє на цвях при забиванні, будувався графік залежності сили від довжини забитого у дошку цвяха, розраховувалась площа під графіком сили (рис.2), яка дорівнює роботі, що

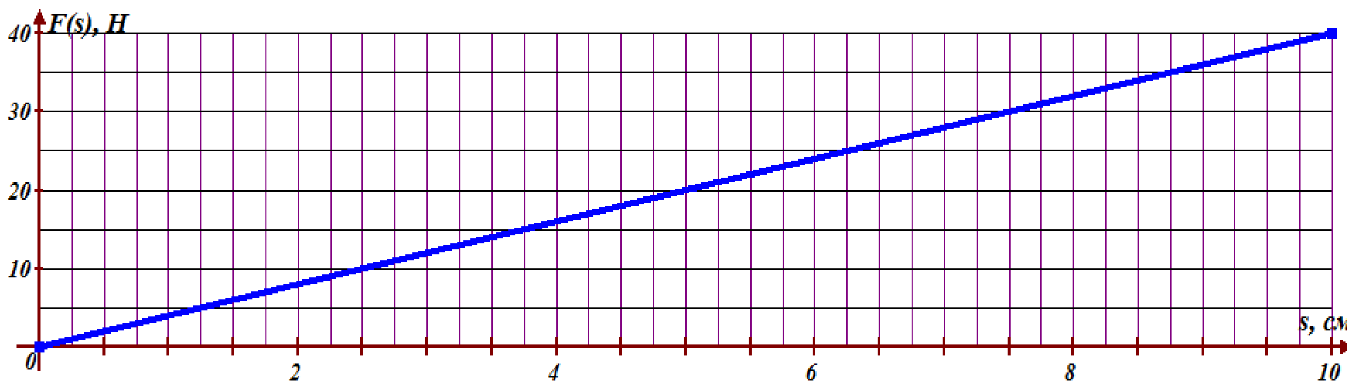


Рис. 2. Залежність сили від довжини.

виконувалась. Розрахунок площі трикутника можна отримати скориставшись формулою: $A = \frac{F_0}{2} \cdot s$, підставивши значення отримаємо значення роботи:

$$A = \frac{40\ \text{Н} \cdot 0{,}1\text{м}}{2} = 2\ Дж \qquad (4).$$

Рішення задачі з використанням ІМ має наступний вигляд.

Використовуючи рівняння роботи як скалярного добутку сили і переміщення, на якому виконується робота, знаходимо диференціал А:

$$dA = F\,ds \qquad (5).$$

Сила тертя цвяха об дошку на усіх відрізках руху згідно графіка (рис.2) пропорційна глибині проникнення цвяха у дошку :

$$F = ks \qquad (6).$$

За графіком отримуємо значення $k = \frac{40\ Н}{10\ см} = 400\ \frac{Н}{м}$. Таким чином, для розрахунку роботи інтегруємо (5) з урахуванням (6):

$$\boldsymbol{A = k\int_0^{0,1} sds = k\frac{s^2}{2}\Big|_0^{0,1} = 400\frac{Н}{м}\cdot\frac{0,01\,м^2}{2} = 2\,Дж} \quad (7).$$

Результати (4) і (7) співпадають.

Для отримання навичок використання ІМ учням пропонується самостійно розв'язати наступні задачі.

1. У компресорі дуже повільно (ізотермічно) стискається 240 г He від об'єму 200 дм^3 до 5дм^3. Визначити роботу стискання, якщо температура газу дорівнює 23 C^0 .

Для перевірки результатів самостійної роботи учнів використовуємо наведене нижче рішення. Газ розглядається як ідеальний.

Позначимо початковий і кінцевий об'єми V_1 і V_2 відповідно,масу газу m, температуру T. Роботу у термодинаміці розраховують, як площу під графіком залежності P(V) у координатах PV(рис.3).

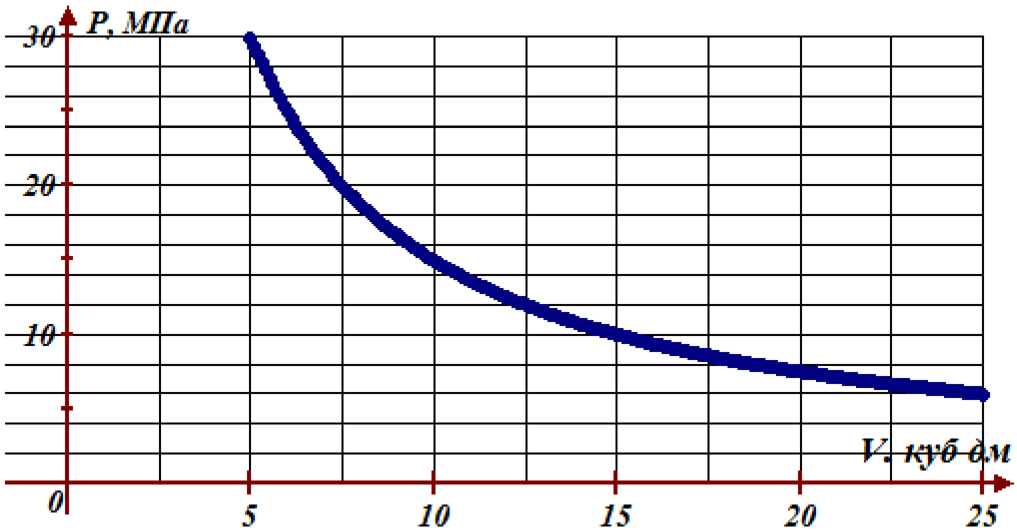


Рис. 3. Залежність P(V) при ізотермічному процесі.

Використовуючи рівняння Мендєлєєва – Клапейрона :

$\boldsymbol{P\cdot V = \nu RT}$, де ν- кількість газу у молях, R= 8,31 $\frac{Дж}{моль\ К}$ - універсальна газова стала, T – температура газу у градусах за шкалою Кельвіна. За умовами задачі ліву частину рівняння можна обчислити як сталу величину:

$$\boldsymbol{\nu RT = \frac{mRT}{\mu} = \frac{240г\cdot 8{,}31\frac{Дж}{моль\ К}\cdot 300К}{4\frac{г}{моль}} = 149580\,Дж} \qquad (8).$$

Таким чином, P·V= 149580 Дж = C має розмірність роботи. Вибираючи малу величину dV на осі V і відповідне значення $P=\frac{C}{V}$, маємо диференціал роботи:

$$\boldsymbol{dA = \frac{C}{V}dV} \qquad (9).$$

Залишилось інтегрувати (9) у межах від V_1 до V_2 :

$$A = C\int_{V1}^{V2} \frac{dV}{V} = C\,ln|V|\Big|_{V1}^{V2} = 149580Дж\,ln\left|195 \cdot\ 10^{-3}\right| \ \ = -244,5\ КДж$$
(10).

Значення роботи від'ємне тому, що роботу виконували над газом зовні.

Задача з електростатики .

2.Маємо заряджену зарядом Q= 1,2 мкКл тонку нитку довжиною L= 2м . Визначити потенціал у точці простору, яка позначена на рис.4 буквою N. Відстані s=2,4м,d=1м.

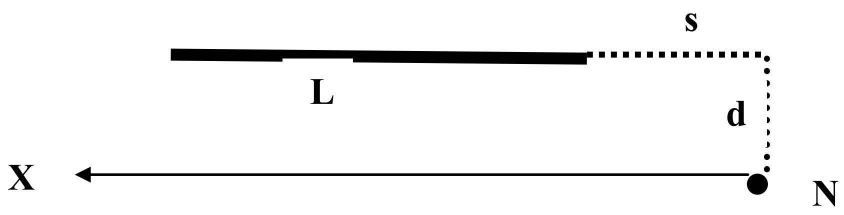


Рис.4. Заряджена нитка.

Як відомо, у цьому розділі фізики є фізичні величини, які підкорюються принципу суперпозиції: напружність, потенціал, заряд.
Рішення задачі.

Зв'яжемо точку N з початком координатної осі X. Відомо, що потенціал точки простору, де електричне поле наведене точковим зарядом, можна розрахувати за формулою :

$$\varphi = k\frac{Q}{R} \qquad (11),$$

де $k\ = 9 \cdot\ 10^9\ \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$- відома електростатична константа, Q- значення точкового заряду, R- відстань від заряду Q до точки N.

За змістом першого етапу ІМ розіб'ємо заряджену нитку на точки dx. Заряд кожної з таких точок можна вважати $dQ = \frac{Q}{L}dx$. Кожний з таких точкових зарядів є джерелом електричного поля. Потенціал від кожного такого заряду в точці N можна розрахувати за формулою:

$$d\varphi = k\frac{dQ}{\sqrt{d^2\ + x^2}} = k\frac{Q}{L}\frac{dx}{\sqrt{d^2\ + x^2}} \qquad (12).$$

Таким чином, отримали диференціал фізичної величини, що розраховується.

Другий етап ІМ полягає у визначенні меж інтегрування і пошуку значення визначеного інтеграла. Межами інтегрування можна вважати координати точок зарядженої нитки: нижня межа – координата s, верхня межа – (s+L).

$$\varphi = k\frac{Q}{L}\int_s^{s+L}\frac{dx}{\sqrt{d^2+x^2}} = k\frac{Q}{L}\,ln\left|x + \sqrt{\ x^2 + d^2}\right|\,_s^{s+L};$$

$$\varphi = 9 \cdot\ 10^9\ \frac{1,2\cdot 10^{-6}}{2}\ ln\left|x + \sqrt{\ x^2 +\ 1}\right|\,_{2,4}^{4,4} = 5400\ ln\left|\ \frac{4,4+\sqrt{5,4}}{2,4+\sqrt{3,4}}\right| =$$
$$=5400\ ln|1,6| = 2538 \qquad (13).$$

Відповідь: потенціал у точці N дорівнює φ = 2538 В.

Задача на використання закону радіоактивного розпаду.

3.Бета радіоактивний ізотоп цезію $^{123}_{55}Cs$ має період напіврозпаду 6 хвилин. Під час аварії на атомній станції Фукусіма-1 викид ізотопу склав 2000 кг. Розрахувати кількість цезію, що залишається радіоактивним через одну годину після аварії. Через який час залишиться 10 відсотків радіоактивних атомів?

За законом радіоактивного розпаду кожний ізотоп має час напіврозпаду Т, за який розпадається половина усіх радіоактивних атомів.

Загальну кількість атомів радіоактивного ізотопу позначимо N_0, кількість атомів, що не розпалися за годину , позначимо N. Таким чином, розрахувавши $\frac{N}{N_0}$, отримаємо рішення задачі.

Позначимо dt малий відрізок часу, за який розпадається dN кількість ізотопів. Кількість розпадів за одиницю часу (активність ізотопу) $\frac{dN}{dt}$ зменшується з часом, оскільки загальна кількість атомів N, що не розпалися, зменшується. З іншого боку $\frac{dN}{dt}$ пропорційна поточній кількості радіоактивних атомів N з коефіцієнтом пропорційності λ, який називають сталою радіоактивного розпаду ізотопу.

Таким чином:

$$-\frac{\boldsymbol{dN}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{\lambda N} \qquad (14),$$

де знак « мінус» означає зменшення кількості dN за рівні проміжки часу ***dt***.

Маємо рівняння з диференціалами змінних величин:

$$\frac{\boldsymbol{dN}}{\boldsymbol{N}} = -\boldsymbol{\lambda dt} \qquad (15).$$

Інтегруючи (12), $\int \frac{\boldsymbol{dN}}{\boldsymbol{N}} = -\int \boldsymbol{\lambda dt}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{lnN} = -\boldsymbol{\lambda t} + \mathrm{C} \qquad (16),$$

де С - стала інтегрування. Сталу С маємо розрахувати, якщо узяти до уваги значення $N=N_0$ при t=0. Таким чином, : $\boldsymbol{lnN_0 = C}$.

Рівняння (16) буде мати вигляд: $\boldsymbol{lnN = -\lambda t + lnN_0}$.

Результатом перетворення рівняння (16) стане закон радіоактивного розпаду: $\boldsymbol{N = N_0\, e^{-\lambda t}}$

З фізичного змісту Т маємо: $\boldsymbol{e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}}$, оскільки при ***t=T*** $\boldsymbol{N = \frac{1}{2} N_0}$.

Таким чином , *з* $\boldsymbol{ln\ 2 = \lambda T}$ витікає:

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{0{,}693}{T}} \qquad (17).$$

Розрахунок λ для нашої задачі дає: $\boldsymbol{\lambda = \frac{0{,}693}{360c} = 0{,}001925c^{-1}}$. За умовами задачі можна обчислити межі інтегрування (12): нижня t=0с, верхня ***t=1год = 3600 с***.

Обчислення N можна зробити за формулою (16) . Для цього обчислимо добуток $\boldsymbol{\lambda t = 0{,}001925\, c^{-1} \cdot 3600\, c = 6{,}93}$.

Обчислення $\boldsymbol{N_0 = \frac{m}{\mu} N_\mathrm{A} = \frac{2000000\text{г}}{123\,\frac{\text{г}}{\text{моль}}}\, 6{,}02 \cdot 10^{23}}\ \text{моль}^{-1} \boldsymbol{= 9{,}8 \cdot 10^{27}}$

(18),

де $\boldsymbol{m}$ – маса ізотопу, $\boldsymbol{\mu}$- молярна маса, N_A- число Авогадро.

Обчислення $\mathbf{e}^{6{,}93} = \mathbf{1046}$.

Таким чином, обчислення $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{N_0}}{\boldsymbol{e}^{\lambda t}} = \frac{\mathbf{9{,}8 \cdot 10^{27}}}{\mathbf{1046}} = \mathbf{0{,}00937 \cdot 10^{27}}$. Робимо висновок, що розпалося радіоактивних атомів $\boldsymbol{\Delta N = N_0 - N} = \mathbf{9{,}79063 \cdot 10^{27}}$.

Відносний показник залишку радіоактивних атомів через одну годину:

$$\frac{\boldsymbol{\Delta N}}{\boldsymbol{N_0}} = \frac{\mathbf{0{,}00937}}{\mathbf{9{,}8}} = \mathbf{0{,}001}.$$

Таким чином, через одну годину залишиться приблизно одна десята відсотка усієї кількості радіоактивних атомів ізотопу ${}^{123}_{55}Cs$.

Для пошуку часу розпаду 90% радіоактивних атомів маємо рівняння (16) у вигляді:

$\mathbf{0{,}9}\boldsymbol{N_0} = \frac{\boldsymbol{N_0}}{\boldsymbol{e}^{\lambda t}}$;

$\boldsymbol{e}^{\lambda t} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0{,}9}} = \mathbf{1{,}11}$;

$\lambda t = \ln 1{,}11$;

$0{,}001925t = 0{,}1$;

$t = \frac{0{,}1}{0{,}001925} = 54{,}7c$.

Таким чином, для розпаду 90% радіоактивного ізотопу достатньо 54,7 с часу.

4. Визначити коефіцієнт поглинання світла α речовини прозорої пластини товщиною 20 см, якщо при проходженні світла через пластину інтенсивність випромінювання зменшується на 60% .

Нехай на пластину падає промінь світла інтенсивністю випромінювання I_0. Після виходу із пластини променя інтенсивність випромінювання дорівнюватиме відповідно $0{,}4I_0$. При проходженні світла у пластину кожна ділянка пластини товщиною dx, яка перпендикулярна напрямку розповсюдження світла, поглинає частку енергії променя, що зменшує його інтенсивність на -dI . Таке зменшення інтенсивності пропорційне інтенсивності I променя, що падає на ділянку, коефіцієнту поглинання речовини α і товщині dx ділянки пластини. Знак мінус показує зменшення інтенсивності променя з ростом dx. Таким чином складається рівняння:

$$-\boldsymbol{dI} = \boldsymbol{I\alpha dx} \qquad (19).$$

Розділивши величини, отримаємо:

$$-\frac{\boldsymbol{dI}}{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{\alpha dx} \qquad (20).$$

Інтегруючи (19) отримаємо:

$\boldsymbol{InI} = -\boldsymbol{\alpha x} + \boldsymbol{lnI_0}$, з якого витікає: $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I_0 e^{-\alpha x}}$ (21).

Рівняння (21) має назву закона Бугера [5] .

За умовою задачі: $\boldsymbol{e^{-\alpha x}} = \mathbf{0{,}4}$. Роз'язуючи таке рівняння відносно $\boldsymbol{\alpha}$, маємо: $-\boldsymbol{\alpha x} = -\mathbf{0{,}916}$. Таким чином, отримаємо відповідь : $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{4{,}58}$ м$^{-1}$.

Для домашнього завдання підібрані задачі, які розв'язуються методом ІМ.

Сидоренков Є.Є.

1.Електричний заряд Q відштовхує заряд q з точки А у точку В, які розміщені на одній лінії на відстані 30 см і 90 см від Q відповідно. Визначити роботу сили такого відштовхування, якщо Q= 12мкКл, q= 120 нКл.

2.Електричний ланцюг має напругу на клемах джерела струму 300 В і сталий опір 120 Ом. Послідовно з опором підключений реостат. Який заряд пройде по електричному колу за одну хвилину, якщо опір реостату буде кожну секунду збільшуватись на 4 Ом? Початковий опір реостату дорівнює нулю.

3.Посудина з водою отримала 400 КДж теплоти і починає її втрачати. За першу хвилину було втрачено 100 Дж теплоти. Визначити кількість теплоти, що залишиться у посудині через 30 хвилин, якщо швидкість втрати теплоти пропорційна наявній кількості теплоти у посудині.

ЛІТЕРАТУРА

1. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів,10-11 класи/ ММЦ м. Дніпропетровськ , електронний посібник БУМ 12- 4,7 Гб.

2.Котляр Б.Д. Какой курс математики необходим будущему горняку, механику, електрику?/Котляр Б.Д.- Сборник научных трудов НГА Украины №3, Том7. Экономика горных предприятий, менеджмент и маркетинг. Финансовые аспекты развития экономики Украины. Проблемы профессиональной подготовки кадров для горной промышленности в национальной системе,- Днепропетровск; РИК НГА Украины, 1998- 264с.

3.Кагалдій Т.С. Методичні вказівки до розв'язування прикладних задач з вищої математики / Кагалдій Т.С.- Дніпропетровськ, НГУ, 2005-29с.

4.Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы/ Беликов Б.С.-М. Высшая школа,1986-256с.

5.Пинский А.А.Физика с основами электротехники/ Пинский А.А., Граковский Г.Ю.- М., Высшая школа 1985-384с.

ПЕРЕДМОВА

На попередньому факультативному занятті було розглянуто інтегральний метод розв’язування фізичних задач.

Але велика кількість фізичних величин функціонально залежні одна від іншої таким чином, що для визначення однієї фізичної величини необхідно визначати похідну функції іншої фізичної величини. Так, між собою залежні координата, швидкість та прискорення руху матеріальної точки, сила струму та заряд, електрорушійна сила та магнітний потік та інші. Від швидкості зміни однієї фізичної величини залежить значення іншої.

У багатьох випадках при розв’язуванні задачі виникає необхідність аналізу функції фізичної величини шляхом визначення її похідної для визначення екстремуму функції.

Таким чином, рішення багатьох фізичних задач шкільної програми мають чітку спрямованість на використання навичок учнів щодо визначення похідної функції фізичної величини. Але збірники задач з фізики для 10,11 класів [1,2] взагалі або майже не вміщують задач, які можливо розв’язати вищевказаним методом.

У факультативному занятті № 2 представлено диференціальний метод (ДМ), наведені приклади рішення фізичних задач з його використанням, наведені умови задач для самостійного розв’язання.

Сидоренков Є.Є.

Фізика. 11 клас
Факультативне заняття №2

Тема: Диференціальний метод розв'язування задач (ДМ).

Мета: Ознайомитись з ДМ, сформувати навички використання ДМ при розв'язуванні типових фізичних задач.

Тип уроку: Закріплення знань, формування умінь і навичок.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДМ

Задачі, що розв'язуються з використанням ДМ, можна розподілити на дві групи:

1. Задачі, у яких рішення отримується у вигляді рівняння фізичної величини як функції часу або іншого параметру у результаті пошуку похідної функції відомої фізичної величини;
2. Задачі, у яких рішення отримується у результаті дослідження функції і пошуку її екстремуму.

Суттєвий зміст ДМ вбачається у наступному.

Із умови задачі визначити відповідність між відомими фізичними величинами та тими фізичними величинами, значення яких потрібно знайти, користуючись відомими визначеннями або законами фізики. Так фізична величина x(t), яка є функцією часу, своєю похідною має швидкість зміни свого значення з часом v(t), похідна якої також швидкість зміни її значення у часі a(t). Для кінематичних задач ці фізичні величини мають зміст координати, миттєвих швидкості і прискорення матеріальної точки. Для найпростішої функціональної залежності фізичних величин, а саме прямо пропорційної, маємо:

$$\boldsymbol{x(t) = v \cdot t} \qquad (1)\ .$$

Похідна:

$$\boldsymbol{\dot{x}\ (t) = v(t)} \qquad (2).$$

Одночасно абсолютні значення $\boldsymbol{\tan\alpha\ =\ v}$, де α- кут нахилу графіка функції $x(t)$ до осі часу. На рис.1 зображено графік $x(t) = 3t$, розрахунок $\dot{x}\ (t) = 3$ дає у результаті значення швидкості зміни $x(t)$. Фізична величина $x(t)$ може бути координатою рівномірного руху матеріальної точки, зарядом, що біжить у провіднику циліндричної форми через його переріз, магнітний потік у просторі, робота сили та інші. Відповідно v буде дорівнювати значенню швидкості матеріальної точки, силі струму, електрорушійній силі, потужності.

При більш складній функціональній залежності від часу $\boldsymbol{x(t)}$ значення $\boldsymbol{\dot{x}\ (t)}$ дає можливість визначити функцію залежності $v(t)$ і її миттєве значення. На рис.2 наведений графік $\boldsymbol{x(t) = t^3}$, значення похідної $\boldsymbol{\dot{x}\ (t) = 3t^2}$. Таким чином, $\boldsymbol{v(t) = 3t^2}$. За цим рівнянням розраховується швидкість зміни фізичної величини у різні миттєвості часу. За значенням вони різні та дорівнюють $\tan\alpha$ дотичних до графіку функції у відповідних точках.

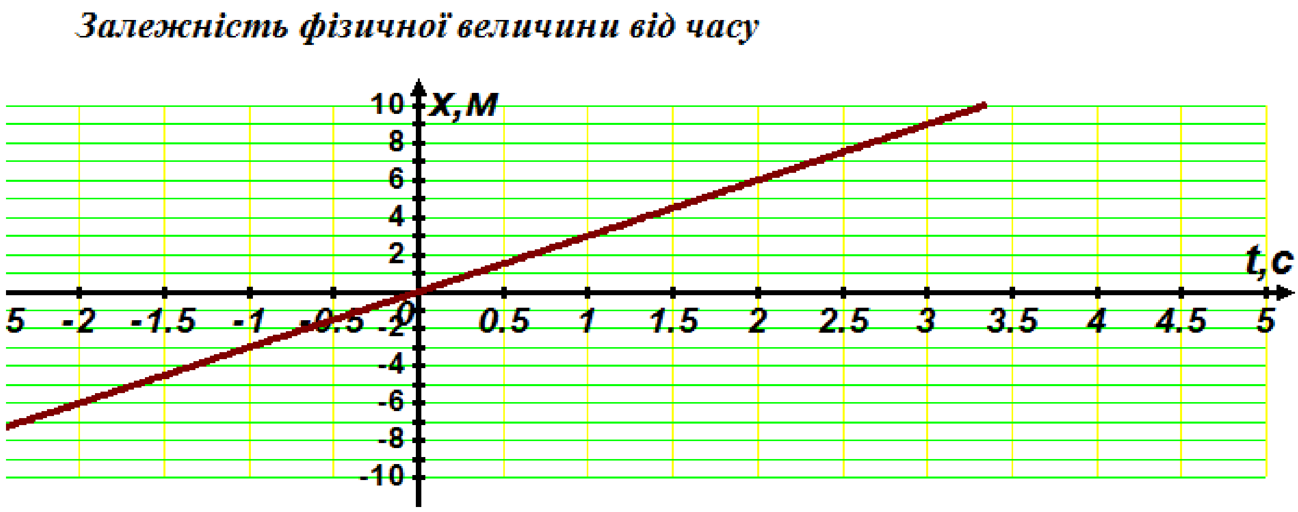


Рис.1. Прямо пропорційна залежність X(t).

Рис. 2. Дотичні до графіку функції у різних точках.

Приклади розв'язування задач.

Задачі з визначенням похідної функції можна класифікувати відповідно до алгоритму розв'язання:

1.Отримання рівняння шуканої фізичної величини за рахунок диференціювання функції іншої величини;

2.Отримання похідної для пошуку екстремуму функції.

Прикладом задачі, що відповідає пункту 1, можна вважати задачу на пошук значення швидкості руху матеріальної точки у заданий час при відомому рівнянні руху.

Умови задачі 1 : тіло рухається прямолінійно вздовж вісі ***OX*** за законом: $\boldsymbol{x(t) = 3\,t^3 + 4\,t^2 - t}$. Визначити значення швидкості через 6 секунд після початку руху тіла. Рівняння руху подане у одиницях вимірювання системи ***SI***.

Для розв'язання задачі винайдемо похідну $\dot{x}(t)$. Результатом диференціювання рівняння $x(t)$ має стати рівняння швидкості:

$\boldsymbol{v(t) = 9\,t^2 + 8\,t\, - 1}$. Підставивши у рівняння швидкості значення часу, отримаємо результат : $\boldsymbol{v(6) = 371}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Подібним чином розв'язується задача пошуку зарядного струму конденсатора.

Умови задачі 2: напруга на конденсаторі ємністю 50мкФ змінюється за законом $U(t) = 210\sin 314t$. Обчислити зарядний струм через конденсатор.

У рішенні задачі використаємо зв'язок між фізичними величинами сили струму I, зарядуQ і ємності C:

$\boldsymbol{I(t)=\frac{dQ}{dt};\ Q(t)=U(t)\ C.}$

Вважаючи $\boldsymbol{Q(t)= C\,U_{м}\,sin\ wt}$, маємо $\boldsymbol{I(t)=\frac{dQ}{dt} = C\,wU_{м}\ cos\,wt}$.

Розрахунок дає результат: $\boldsymbol{I(t)=50\cdot 10^{-6}Ф \cdot 314c^{-1} \cdot 210B \approx 3{,}3cos\,314t\ A}$.

Прикладом задачі, що відповідає пункту 2, може бути задача на визначення мінімальної відстані між рухомими автомобілями.

Умови задачі 3: два автомобіля одночасно почали рух згідно до графіків траєкторій руху (див.рис.3), що нанесені штрихованими лініями, зі швидкостями $v_1 = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $v_2 = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ відповідно. Визначити мінімальну відстань, що виникає між автомобілями.

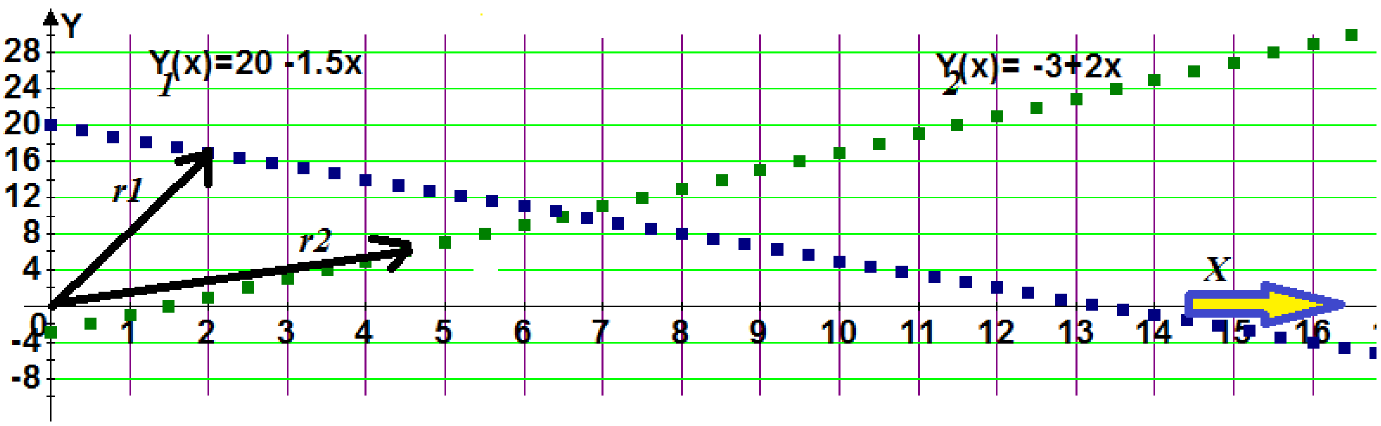


Рис.3. Графіки траєкторій руху.

Положення автомобіля на координатній площині можна визначити, користуючись координатами відповідного вектора **r**:

$\boldsymbol{r_1} = y_1(t)\boldsymbol{j} + x_1(t)\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{r_2} = y_2(t)\boldsymbol{j} + x_2(t)\boldsymbol{i}$, де $\boldsymbol{j, i}$ одиничні вектори вздовж осі Oy та Ox відповідно, $y\,(t), x\,(t)$ - відповідні координати руху, що змінюються з часом за законами :

$\boldsymbol{y_1(t) = 20 - v_{y1}t,\ y_2(t) = -3 + v_{y2}t,\ x_1(t) = v_{x1}t,\ x_2(t) = v_{x2}t}$ (*).

Рівняння для координат скалярні і вміщують значення проекцій швидкостей v_y та v_x на відповідні координатні осі . У свою чергу проекції швидкостей можна розрахувати через кути нахилу α та β векторів $\boldsymbol{v_1}$ та $\boldsymbol{v_2}$ до координатної осі $\boldsymbol{OX}$. Рівняння (*) будуть мати вигляд:

$$\boldsymbol{y_1(t) = 20 - v_1 \sin\alpha\, t,\; y_2(t) = -3 + v_2 \sin\beta\, t,\; x_1(t) = v_1 \cos\alpha\, t,}$$
$$\boldsymbol{x_2(t) = v_2 \cos\beta\, t}\;.$$

Оскільки напрям вектора швидкості збігається з напрямом руху, то за значеннями координат траєкторії:

$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{20}{13{,}5} = 1{,}48, \tan\beta = \frac{3}{1{,}5} = 2}$, де $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$ кути нахилу до осі 0х швидкостей $\boldsymbol{v_1}$ та $\boldsymbol{v_2}$ відповідно. Таким чином:

$$\boldsymbol{\sin\alpha = 0{,}83, \sin\beta = 0{,}89, \cos\alpha = 0{,}56, \cos\beta = 0{,}45.}$$

Поточна відстань між автомобілями на координатній площині розраховується через координати відповідних векторів $\boldsymbol{r_1}$ та $\boldsymbol{r_2}$:

$$\boldsymbol{R(t)}=\sqrt{|\boldsymbol{r_2 - r_1}|} = \sqrt{\boldsymbol{\Delta y^2 + \Delta x^2}} = \sqrt{\boldsymbol{(y_2(t) - y_1(t))^2 + (x_2(t) - x_1(t))^2}}$$

Підставивши у рівняння поточної відстані R(t) значення координат відповідно до рівняння (*), значення швидкостей і тригонометричних функцій кутів нахилу, маємо:

$$\boldsymbol{R(t)}=\sqrt{\boldsymbol{(-3 + v_2 \sin\beta\, t - (20 - v_1 \sin\alpha\, t))^2 + (v_2 \cos\beta\, t - v_1 \cos\alpha\, t)^2}} =$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{(-23 + 8{,}9t + 12{,}45t)^2 + (4{,}5t - 8{,}4t)^2}} =$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{(-23 + 21{,}35t)^2 + (3{,}9t)^2}}=$$
$$=\sqrt{\boldsymbol{(-23 + 21{,}35t)^2 + 15{,}21t^2}} \approx \sqrt{\boldsymbol{529 - 491\,t + 471\,t^2}} \quad (**).$$

Після пошуку похідної $\dot{R}(t)$ маємо розв’язати рівняння $\dot{R}(t) = 0$ відносно t, оскільки воно являється умовою екстремуму функції R(t). Значення t підставимо у рівняння (**) і знайдемо шукане значення R.

$\boldsymbol{\dot{R}(t) = \frac{1}{2\sqrt{529 - 491\,t + 471\,t^2}}(-491 + 471t).}$ Екстремум функції досягається при $t \approx 1$с.

Розрахуємо мінімальну відстань між автомобілями:

$\boldsymbol{R_{min} = \sqrt{529 - 491 + 471}}$ = ***22,56*** м.

Інша задача, що відповідає пункту 2, дає можливість розрахувати максимальне значення споживаної потужності електричного кола у залежності від параметрів джерела живлення.

Умови задачі 4: визначити силу струму , що відповідає максимальному значенню споживаної потужності, якщо ЕРС та внутрішній опір джерела відповідно дорівнюють 20 В та 2,5 Ом[3].

При розв’язанні задачі слід використати визначення фізичних величин - потужності $\boldsymbol{P}$, сили струму $\boldsymbol{I}$, ЕРС $\boldsymbol{\varepsilon}$ та внутрішнього опору $\boldsymbol{r}$ джерела струму. За умови збереження електричної енергії, споживана потужність може бути визначена рівнянням:

$\boldsymbol{P_с = P_з - P_в}$, **(*)** де $\boldsymbol{P_з}$ -загальна потужність кола, $P_в$- потужність споживання джерела струму.

Підставивши у рівняння (*) замість $\boldsymbol{P_з}$ та $\boldsymbol{P_в}$ їх залежність від сили струму за визначенням, маємо:

$\boldsymbol{P_с(I)} = \mathrm{I} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{I}^2 \cdot \boldsymbol{r}$ (**).

Похідна функції $P_c(I)$ має вигляд: $\dot{\boldsymbol{P}}_c\ (I) = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{2}I \cdot \boldsymbol{r}$. Екстремум функції має бути визначений за умови $\dot{\boldsymbol{P}}_c\ (I) = \mathbf{0}$. Таким чином, сила струму $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{2}\boldsymbol{r}}$ **.** Розрахунок дає значення сили струму: $\boldsymbol{I} = \dfrac{\mathbf{20}\boldsymbol{B}}{\mathbf{2 \cdot 2{,}5}\ \boldsymbol{Ом}} = \boldsymbol{4A}$.

Аналіз рівняння (**) дає можливість порозуміти, що при значеннях струму $\boldsymbol{I = 0A}$ та $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{8A}$ споживана потужність $\boldsymbol{P}_c = 0$ Вт. Тому робимо висновок таким, що значення струму I= 4A відповідає максимальному значенню $\boldsymbol{P}_{c\ макс}$ = 40 Вт.

Пошук похідної функції фізичної величини може використовуватись у якості додаткової процедури у загальному алгоритмі рішення задачі.

Умови задачі 5: на нерухомому блоці масою 10 кг, що може обертатися на горизонтальній вісі без тертя, висить вантаж масою m на тонкій нитці, що намотана на блок (рис.4). Блок має форму диску радіусом 20 см. У результаті дії сили натягу нитки він починає обертатися за законом: $\boldsymbol{\varphi(t) = t^2 + 2t - 8}$ Визначити масу m .

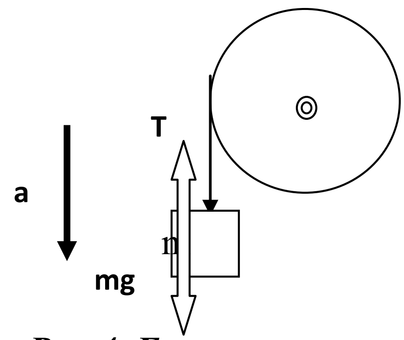


Рис.4. Блок з вантажем.

Для розв'язування задачі використаємо рівняння динаміки обертального руху блока:

$\boldsymbol{M = j \cdot \beta}$ (*), де $\boldsymbol{M}$- момент сили, що діє на блок, $\boldsymbol{j}$ – момент інерції блока, $\boldsymbol{\beta}$ – його кутове прискорення. Момент інерції диску:

$\boldsymbol{j = \frac{MR^2}{2}}$ (**), де $\boldsymbol{R}$ – радіус диску, $\boldsymbol{M}$ - маса блока.

Вантаж m рухається з прискоренням **a**, значення якого розраховується за формулою: $\boldsymbol{a = \beta \cdot R}$. Таке прискорення вантаж отримав за законом Ньютона завдяки дії сил тяжіння mg і натягу нитки T. У проекції на вертикальну вісь рівняння руху вантажу записується у вигляді:

$\boldsymbol{mg - T = ma}$ (***).

Момент сили M визначається через значення сили T натягу нитки, що діє на блок і вантаж у протилежних напрямках : $\boldsymbol{M = TR}$.

Підставивши значення фізичних величин з рівняння (**), та (***) у рівняння (*), маємо:

$$\boldsymbol{m(g - \beta R)R = \frac{MR^2}{2} \cdot \beta}\ .$$

Кутове прискорення визначається подвійним диференціюванням рівняння обертального руху блока:

$$\boldsymbol{\beta} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{t}) = \ \mathbf{2}\ \frac{1}{\text{с}^2}\,.$$

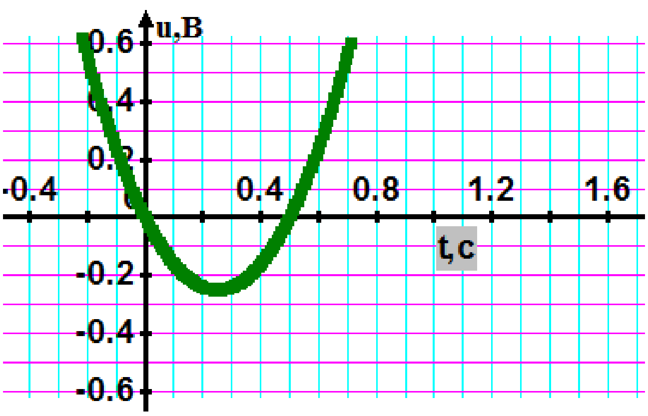
Таким чином, масу вантажу розрахуємо за формулою:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{MR}}{2(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\beta R})} \cdot \boldsymbol{\beta}\,.$$

Результат розрахунків:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{10}\ \textit{кг}\ \cdot \mathbf{0,2}\ \textit{м}}{\mathbf{2}\left(\mathbf{9,8}\frac{\textit{м}}{\textit{с}^2} - \mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{\textit{с}^2}\mathbf{0,2}\ \textit{м}\right)} \cdot \mathbf{2}\frac{\mathbf{1}}{\textit{с}^2} \approx \mathbf{0,2}\ \textit{кг.}$$

Умови задачі 6: електричне коло складається із послідовно сполучених конденсатора ємністю C=1000мкФ і активного опору R=1200 Ом. Від джерела струму подається напруга, що залежить від часу U_0(t) = $4t^2 - 2t$. Визначити напругу на активному опорі U_R через чверть секунди після початку зарядки конденсатора, якщо U_R(t) $\ll$ U_0(t).



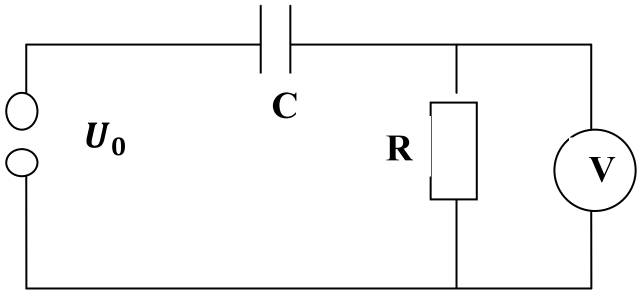


Рис.5. Електричне коло і графік залежності напруги від часу.

При появі змінної напруги $\boldsymbol{U_0}$ на затискачах джерела струму, конденсатор має заряджатися. При цьому зарядний електричний струм має бігти через опір **R** .

Для послідовного електричного ланцюга маємо:

U_0(t)= $U_R(t) + U_c(t)$, де $U_c(t)$ - напруга на конденсаторі.

За законом Ома для ділянки кола з опором R маємо $U_R(t) = I(t)R$. За визначенням сили струму: $\boldsymbol{I(t)} = \frac{\boldsymbol{dQ}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{CdU_c(t)}}{\boldsymbol{dt}}$.

Враховуючи умову U_R(t) $\ll$ U_0(t) , маємо диференційний ланцюг, на якому вихідні параметри напруги U_R(t) являються похідною від функції вхідної напруги U_0(t), а саме : $\dot{U}_0(t) = U_R$(t), оскільки U_0(t) $\approx$ $U_c(t)$.

Таким чином:

$$\boldsymbol{U_R(t)} = \boldsymbol{RC}\frac{\boldsymbol{dU_0(t)}}{\boldsymbol{dt}} = \ \textit{1200 Ом} \cdot \mathbf{1000} \cdot \ \mathbf{10^{-6}}\ \text{Ф}\ \cdot (\mathbf{8 \cdot 0,25}\ - \mathbf{2}\,)\,\frac{\text{В}}{\text{с}} = \mathbf{0}\text{В}.$$

Робимо висновок: струм у колі через 0,25 с відсутній.

Використати ДМ можливо не тільки при умові залежності фізичної величини від часу. У наступній задачі визначається умова найменшого значення часу як функції координати.

Умова задачі 7: з пункту А на березі прямокутного озера треба потрапити в пункт В на протилежному березі (рис.6). Людина пливе через озеро на човні зі швидкістю v_1 =1 м/с, а далі іде пішки зі швидкістю $v_2 = 4$ м/с. Визначити напрямок руху людини, при якому час мандрівки буде найменшим [4].

Від ***A*** до ***C*** мандрівка людини буде тривати проміжок часу:

$\boldsymbol{t_1} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}$, а від ***B*** до ***C***:

$\boldsymbol{t_2} = \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}$.

Загальний час $t = t_1 + t_2$. Умова екстремуму функції t(x) $\frac{dt}{dx} = \mathbf{0}$.

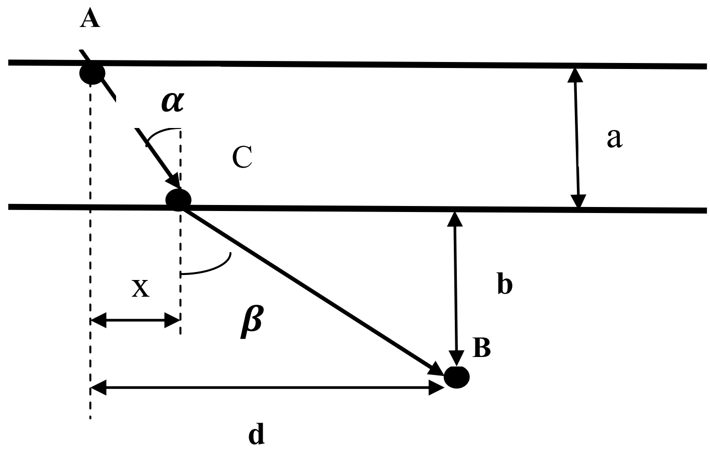


Рис.6. Напрямок мандрівки людини.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \mathbf{0}.$$

Оскільки $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sin\alpha, \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin\beta$, то $\frac{dt}{dx} = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = \mathbf{0}$.

Таким чином: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4}$.

У залежності від швидкостей руху на човні і пішки людина має додержуватись означених напрямків руху.

Умова задачі 8: залізний диск радіусом R=50 см, що розміщений вертикально, обертається у магнітному полі з індукцією B=0,8Тл навкруги своєї центральної вісі з кутовою швидкістю w = 10 $с^{-1}$. Площина диску перпендикулярна до горизонтальних ліній індукції магнітного поля, напрям вісі обертання збігається з напрямом вектора індукції B. Визначити електрорушійну силу, яка виникає на контактах **а** і **в**, що ковзають по поверхні диску(рис.7) [5].

За допомогою контактів **а** і **в** складене замкнене коло **а в** ***С А***(див. Рис.7). При обертанні диску, за законом електромагнітної індукції, на контактах **а** і **в** виникає ЕРС $\boldsymbol{\varepsilon}$ індукції, а у колі виникає сталий струм ***I***.

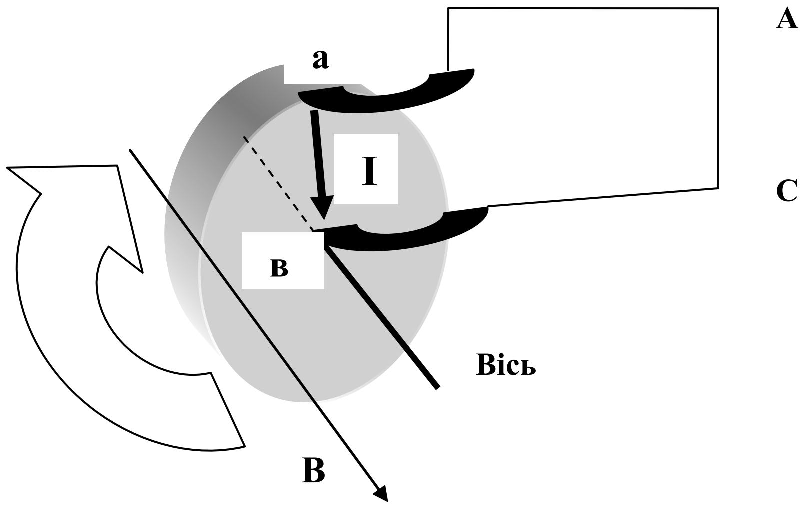


Рис.7. Диск, що обертається у магнітному полі.

При повертанні диску на малий кут $d\varphi$ радіус диску |**а в**|= R повертається на такий же кут і «замітає» у просторі площу $\boldsymbol{dS = \frac{1}{2}R^2\, d\varphi}$. Потік магнітної індукції через площину $\boldsymbol{d\phi = BdS}$, а швидкість його зміни $\boldsymbol{\frac{d\phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\varphi}{dt}}$. За законом електромагнітної індукції:

$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}BR^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}BR^2 w}$, де $\boldsymbol{w = \frac{d\varphi}{dt}}$ - кутова швидкість обертання диску.

Розрахуємо ЕРС: $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{1}{2}0{,}8\ \text{Тл}\cdot 0{,}25\ \text{м}^2\cdot 10\text{с}^{-1}}$= 2В.

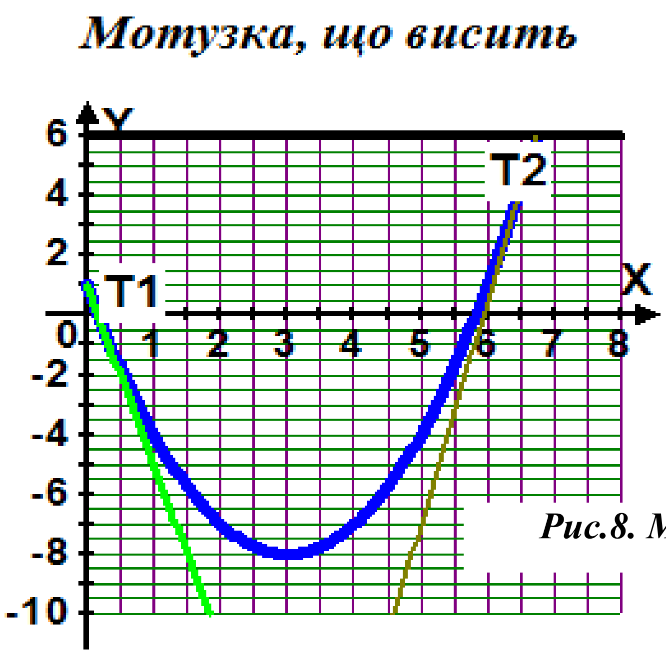


Рис.8. Мотузка.

Умова задачі 9: мотузка, що підвішена за дві точки (рис.8), блакитний колір), огинає у повітрі параболу $\boldsymbol{y = 1 + x^2 - 6x}$. Сили натягу мотузки у точках кріплення $\boldsymbol{T_1} = \mathbf{4}$Н, $\boldsymbol{T_2} = \mathbf{6}$Н . Визначити силу тяжіння, що діє на мотузку.

Для рішення задачі скористаємось законом Ньютона:

$\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_2}+\boldsymbol{F}_{\text{т}} = 0$, де $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ **-** сили реакції підвісів у точках кріплення, що діють на мотузку, $\boldsymbol{F}_{\text{т}}$ **-** сила тяжіння.

Додаток проекцій цих сил на вертикальну вісь $\boldsymbol{O\ Y}$: $\boldsymbol{F_{1y}}+\boldsymbol{F_{2y}} - \boldsymbol{F_{my}} = 0$.

За іншим законом Ньютона: сили $\boldsymbol{F_1} = -\text{T}_1, \boldsymbol{F_2} = -\text{T}_2$ і діють у напрямках дотичних до мотузки у відповідних точках . Цей напрямок можливо визначити дослідивши значення похідної функції $y(x)$ форми мотузки у точках підвісу: $\dot{y} = 2x - 6$.

Визначимо координати точок підвісу: $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y_1} = \mathbf{1}$, координата x_2 визначається після розв'язання рівняння $\mathbf{6} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x^2} - \mathbf{6}\boldsymbol{x}$, оскільки підвіс другої точки знаходиться на 5 одиниць вище, ніж першої : $y_2 = 6$ $x_2 = 6{,}74$. Таким чином, значення похідної у точках підвісу $\boldsymbol{\dot{y}_1} = -\mathbf{6}$, $\boldsymbol{\dot{y}_2} = \mathbf{7{,}48}$**.** Рівняння дотичних прямих з використанням значень похідної будуть мати вигляд: $\boldsymbol{y_1} = \mathbf{1} - \mathbf{6}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y_2} = \mathbf{7{,}48}\boldsymbol{x} - \mathbf{44{,}4}$. Вони перетинаються у точці, абсцису x_0 якої винайдемо з умови: $\mathbf{1} - \mathbf{6}\boldsymbol{x_0} = \mathbf{7{,}48}\boldsymbol{x_0} - \mathbf{44{,}4}$, звідкіль витікає: $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{3{,}368}$**.**

Координата x_0 належить вертикалі, вздовж якої діє сила тяжіння $\boldsymbol{F}_{\text{т}}$, що прикладена до мотузки. Визначимо її значення з рівняння проекцій сил: $F_{1\text{y}}+F_{2\text{y}} = F_{\text{тy}}$. Значення похідної співпадає зі значеннями тангенсів кутів нахилу прямих до вісі О Х : $\boldsymbol{tan\,\alpha_1} = -\mathbf{6}, \boldsymbol{tan\,\alpha_2} = \mathbf{7{,}48}$. Для визначення проекцій сил на вертикальну вісь використаємо значення $\mathbf{sin\,\alpha_1} =$ **0,986 ,** ***sinα2=0,99***. Розрахувавши значення ***F1y=4Н·0,986=3,944Н , F2y=6Н·0,99=5,94Н***, маємо значення сили тяжіння ***Fmy=9,884Н.***

Нижче наведено умови задач для самостійного розв'язання.

1.Яку максимальну потужність споживає електродвигун, що ввімкнули у мережу сталого струму напругою 220 В, якщо повний електричний опір кола становить 44 Ом? Який струм при цьому тече у колі? (Відповідь: 275 Вт, 2,5А) [3].

2. Мідний диск радіусом 50 см, що розташований перпендикулярно до ліній магнітної індукції Землі, обертається з частотою 50 обертів за секунду. Визначити різницю потенціалів між центром і краєм диску. Магнітна індукція Землі В= 50 мкТл. (Відповідь: 2 мВ) [5].

3. Матеріальна точка масою 10 кг рухається прямолінійно під дією сили F(x). Робота A(x) сили залежить від координати за законом: ***A(x)***=$\mathbf{5}\text{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{4x}$. Визначити прискорення a точки в координаті x=20м. (Відповідь: a = 20.4 $\frac{м}{c^2}$).

4.Визначити струм у кінці п'ятої секунди, якщо відомо, що заряд, що протікає через провідник, починаючи з моменту t=0с дорівнює $\boldsymbol{q(t)} = \mathbf{2}\boldsymbol{t^2} + \mathbf{3}\boldsymbol{t} + \mathbf{1}$ (Кл). (Відповідь: 23А) [6].

5.Військовий корабель рухається океаном на схід зі швидкістю 15 вузлів. Підводна субмарина у цей час рухається сталим курсом зі швидкістю 26 вузлів на відстані 6 міль на півдні від корабля. Через де який час субмарина опинилась на мінімальній відстані від корабля, яка складає 3 милі. Розрахувати курс корабля і час, що минув між двома вищевказаними положеннями корабля і субмарини. (Відповідь: виключно на північ, 0,17 год) [7].

ЛІТЕРАТУРА

1. Божинова Ф.Я. Физика Академический уровень: Сборник задач 10 класс / Ф.Я. Божинова , Е.А.Карпухина – Х.: Ранок , 2010. ─ 192с.

2. Божинова Ф.Я. Физика. Академический и профильный уровень: Сборник задач 11 класс / Ф.Я. Божинова , Е.А.Карпухина ,Т.А.Сарий. – 2-е изд., перераб. и доп. ─Х.: Ранок , 2011. ─ 224с.

3. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике / Н.И.Гольдфарб.─ 2-е узд.─ М.: Высшая школа , 1969 . ─288 с., стр.104.

4. Гончаренко С.У. Фізика. Олімпіадні задачі /С.У.Гончаренко, Є.В.Коршак – Тернопіль: Навчальна книга,1999. – 200с., стор.6.

5.Фриш С.Э. Курс общей физики том 2: Электрические и электромагнитные явления / Фриш С.Э., А.В.Тиморева.─ 9-е изд., перераб. и доп.─ М.: государственное издательство физико-математической литературы, 1962.─ 516 с., стр. 413.

6. Кагадій Т.С. Методичні вказівки до розв'язання прикладних задач з вищої математики/ Кагадій Т.С. – Д.: Національний гірничий університет, 2005. ─29с., стор.3.

7. Фейнмановские лекции по физике под редакцией Леванюка А.П.: Задачи и упражнения с ответами и решениями ─ М.: Мир , 1969 . – 624с., стр.34.

Фізика. 11 клас
Факультативне заняття №3

Тема уроку: розв’язування задач інтегральним та диференціальним методами

Мета уроку:

навчальна: формувати уявлення про методи рішення задач, узагальнити знання учнів про форми використання матаналізу у фізичних задачах, формувати уміння досліджувати отримані рівняння, формувати поняття про загальну форму диференціального рівняння вільних коливань, розвивати ціннісно – смислову та навчально – пізнавальну компетентності;

розвивальна: формувати уявлення про ідеї і методи аналітичного представлення фізичних процесів різного природного походження; розвивати навики дослідження фізичних процесів, уміння аналізувати, порівнювати, спостерігати, робити умовиводи за аналогією, працювати самостійно; активізувати алгоритмічне та логічне мислення учнів, їх увагу, пам`ять, розумову активність;

виховна: виховувати інтерес до вивчення фізичних процесів у оточуючому середовищі, потяг до наукової творчості, розуміння ролі фізичної науки у житті, розуміння важливості фізико - математичних знань, розвивати алгоритмічну культуру, звичку до системної розумової справи, зібраність, самовладання, уміння сконцентруватися, уміння слухати інших, комунікативну ком-петентність.

Форми проведення заняття: теоретичні дослідження, вправа.

Тип уроку: комбінований.

Обладнання та методична підтримка: довідникові таблиці, таблиці математичного аналізу рівнянь.

Задача з розділу «Електродинаміки»: визначити значення навантаження $\boldsymbol{R}$, що ввімкнене у ланцюг із джерелом сталого струму з ЕРС $\boldsymbol{E}$ та внутрішнім опором $\boldsymbol{r}$ (Рис.1), при якому корисна споживана потужність $\boldsymbol{P}$ електричного струму буде мати максимальне значення.

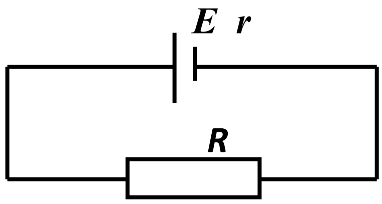


Рис.1. Електрична схема ланцюга.

Навантаження $\boldsymbol{R}$ може мати розгалужену схему опорів, але для вирішення наведеної задачі склад навантаження не є принциповим. Задача може бути розв'язана кількома методами, у яких є загальна фізична складова – знання законів Ома та Джоуля – Ленца. А саме, потужність струму у навантаженні може бути розрахована за виразом:

$$\boldsymbol{P = I^2 \cdot R} \qquad (1),$$

де $\boldsymbol{I}$ – сила струму. Вона може бути визначена за законом Ома:

$$\boldsymbol{I = \frac{E}{R+r}} \qquad (2).$$

Підставивши вираз (2) у рівняння (1) отримаємо результат:

$$\boldsymbol{P = \frac{E^2}{(\sqrt{R} + \frac{r}{\sqrt{R}})^2}} \qquad (3).$$

Аналізуючи таке рівняння доходимо висновку, що максимальне значення $\boldsymbol{P}$ буде отримано за мінімального значення знаменника. Скориставшись нерівністю, що є справедливою до усіх невід'ємних значень $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{в}$: $\boldsymbol{a + в \geq 2\sqrt{a \cdot в}}$, зауважимо, що рівність досягається лише за умови $\boldsymbol{a = в}$. Таким чином, аналізуючи знаменник (3), отримаємо очевидну відповідь у задачі : $\boldsymbol{R = r}$.

Інші два способи розв'язання використовують закон збереження енергії у електричному колі у вигляді:

$$\boldsymbol{P = E \cdot I - I^2 \cdot R} \qquad (4).$$

Аналізуючи рівняння (4), доходимо висновку, що значення $\boldsymbol{P}$ може мати нульове значення у двох випадках : коли $\boldsymbol{I = 0}$, або $\boldsymbol{I = \frac{E}{R}}$. Середнє між цими значеннями дасть таку силу струму, за якого може бути максимальне значення $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{I = \frac{E}{2R}} \qquad (5).$$

Порівняння (5) та (2) дає підстави зробити висновок : $\boldsymbol{R = r}$.

Аналіз рівняння (4) можна провести іншим способом, а саме, із використанням математичної теореми про екстремум функції у точках аргументу, де похідна функції дорівнює нулю. Отримаємо похідну ***P(I)*** :

$$\dot{P} = E - 2I \cdot R \qquad (6).$$

Функція ***P(I)*** буде мати екстремум при $\dot{P} = 0$. З рівняння (6) витікає, що це можливо при умові (5). Отримуємо той же результат : ***R = r***.

Наступна задача кінематики стосується визначення рівнянь швидкості, прискорення та форми траєкторії точки, що рухається по площині у декартовій системі координат ***OXУ***, якщо рівняння її радіус – вектору ***r*** має вигляд:

$$\vec{r} = \vec{i}\ \ A\sin\ 5t\ + \vec{j}B\cos^2 5t \qquad (7),$$

де $\vec{i}$ та $\vec{j}$ - одиничні вектори осей ОХ та ОУ відповідно.

З рівняння (7) маємо закони зміни координат ***x(t)*** та ***y(t)***. Їх похідні за часом будуть дорівнювати рівнянням проекцій швидкості на координатні осі:

$$v_x(t) = 5\,\mathrm{A}\cos 5t \qquad (8),$$
$$v_y(t) = -5\,\mathrm{B}\sin 10t \qquad (9).$$

Рівняння для проекцій прискорення матеріальної точки визначається як похідна за часом рівнянь швидкостей (8,9):

$$a_x = -25\,A\sin 5t \qquad (10),$$
$$a_y = -50B\cos 10t \qquad (11).$$

Рівняння траєкторії можна отримати виключивши ***t*** із рівнянь для координат (7) і спростивши тригонометричне рівняння $y = B\cos^2 arc\sin\frac{x}{A}$ Якщо надати значення ***A***= 4м, ***B***=8м, то рівняння траєкторії буде мати вигляд:

$$y\ = 8 - 0,5x^{\,2} \qquad (12).$$

Рівняння (12) описує параболу на площині ***OXУ***.

Задача на пошук координат центру ваги плоскої фігури(половини кола радіусом ***R***), що зображена на рис.2, не може бути вирішена виключно із використанням відомого правила моментів сил. При визначенні координат центру ваги ***C*** $(X_c\ ,У_c)$ такої фігури (Рис.2) зауважу, що координата X_c буде знаходитись на осі ***У***, оскільки фігура відносно осі ***У*** симетрична. Для пошуку $У_c$ необхідно визначити статичний момент J_x як додаток усіх безкінечно малих площинок ***dS*** (Рис.3), помножених на їх відстань ***y*** до осі ***X*** :

$$J_x = \int_S y\ dS \qquad (13).$$

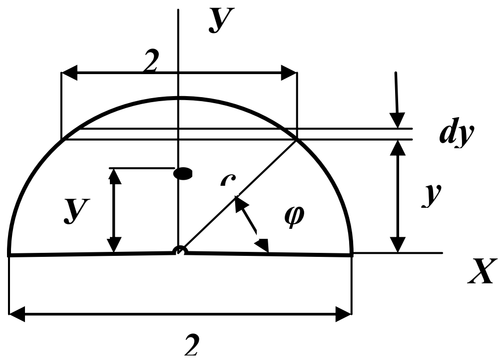


Рис.2. До визначення центру тяжіння плоскої фігури.

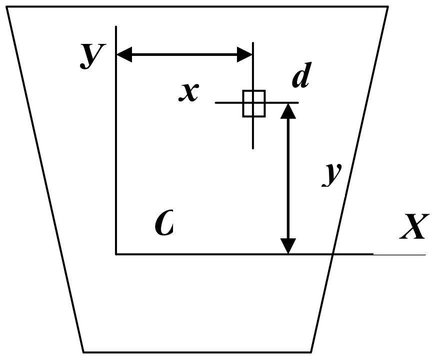


Рис.3. До визначення статичного моменту плоского перерізу.

Відношення J_x до загальної площі S фігури буде дорівнювати $У_c$. Треба зауважити, що таке рішення споріднене способу визначення координати точки опору для рівноваги важеля, до якого прикладені сили F_i, тільки у якості додатку моментів сил відносно вісі обертання важеля виступає статичний момент плоскої фігури відносно обраної осі X. Для визначення J_x виділимо на фігурі (Рис.2) елементарну площинку dS із площею близькою до прямокутника $dS=2xdy$. Координати x та y можна отримати через радіус кола R та тригоно-метричні функції кута φ: $y = R\sin\varphi$, $x = R\cos\varphi$. Враховуючи $dy = d(R\sin\varphi) = R\cos\varphi d\varphi$, можна отримати вираз:

$$J_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R\cos\varphi(R\cos\varphi)R\sin\varphi d\varphi = 2R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}R^3 \quad (14).$$

Координату $У_c$ визначимо з рівняння:

$$У_c = \frac{J_x}{S} = \frac{2/3R^3}{\pi R^2/2} = \frac{4}{3\pi}R \quad (15).$$

Інтегральним методом розв'язано практичну задачу, результати якої неодмінно мають використовуватись у архітектурній, будівельній та машинобудівній галузях.

У наступній – «термодинамічній» – задачі ставиться за мету визначення товщини льоду на поверхні озера, що утворився за дві доби після пониження температури повітря до мінус 20^0С. Вважається, що до похолодання повітря льоду на поверхні озера не було, а потік теплоти з води до повітря визначається рівнянням:

$$q = \frac{Q}{St} = \kappa\frac{\Delta T}{d} \quad (16),$$

де Q – загальна кількість теплоти, S – площа поверхні льоду, t – час спостереження явища, ΔT – різниця температури повітря та води, d – товщина льоду, $\kappa = 2,24\frac{Вт}{м\cdot К}$ - коефіцієнт теплопровідності льоду.

Для рішення задачі зауважу, що загальна кількість теплоти Q, що відводиться від води для утворення льоду, складається із кількості теплоти кристалізації льоду, та кількості теплоти його охолодження до температури повітря:

$$\boldsymbol{Q = \lambda m + cm\Delta T} \qquad (17),$$

де $\boldsymbol{\lambda = 330\ \frac{КДж}{кг}}$ – питома теплота кристалізації, $\boldsymbol{m}$ – маса льоду, що утворилася, $\boldsymbol{c\ = 2100 \frac{Дж}{кг\,К}}$ – питома теплоємність льоду.

Враховуючи умови задачі (16), та рівняння (17), отримаємо диференціальне рівняння :

$$\boldsymbol{\rho(\lambda + c\Delta T)xdx = \Delta T k dt} \qquad (18),$$

де $\boldsymbol{\rho = 900\ \frac{кг}{м^3}}$ - густина льоду, $\boldsymbol{dx}$ – поточна товщина льоду, що утворився, $\boldsymbol{dt}$ – поточна тривалість часу утворення льоду товщиною $\boldsymbol{dx}$.

Шляхом інтегрування рівняння (18) у межах від $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{d}$ отримаємо вираз для розрахунку товщини льоду:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{\frac{2k\Delta T t}{\rho(\lambda + c\Delta T)}}} \qquad (19).$$

Розрахунок треба проводити з числовими значеннями фізичних величин у відповідності до системи SI:

$$\boldsymbol{d = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}24\frac{Вт}{м\cdot К}\cdot 20\ К\cdot 48\cdot 3600 с}{900\frac{кг}{м^3}(330\cdot 10^3\frac{Дж}{кг} + 2100\frac{Дж}{кг\cdot К}20\ К)}} = 21,5\ см} \qquad (20).$$

Умова задачі з розділу «Динаміка»: пуля масою 10 г зі швидкістю 200 м/с потрапляє у в’язку середу, де через 0,01 с зменшує свою швидкість у два рази. Спротив середи щодо руху пулі пропорційний її швидкості. Визначити коефіцієнт пропорційності та встановити залежність швидкості пулі від часу.

За умовою задачі залежність сили спротиву середи від швидкості має вигляд:

$$\boldsymbol{F = k \cdot v} \qquad (21),$$

де $\boldsymbol{k}$ **-**коефіцієнт пропорційності.

За законом Ньютона сила $\boldsymbol{F}$ спротиву середи надає пулі прискорення $\boldsymbol{a}$, що є похідною швидкості руху:

$$\boldsymbol{m \cdot \frac{dv}{dt} = k \cdot v} \qquad (22).$$

Рішення такого диференціального рівняння отримаємо після інтегрування:

$$\boldsymbol{\int_{200}^{100} \frac{dv}{v} = \frac{k}{m}\int_0^{0,01} dt} \qquad (23).$$

У результаті інтегрування отримаємо значення коефіцієнту пропорційності $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k = \frac{m}{t} ln\, 0,5 = -0,7} \qquad (24).$$

Рівняння залежності швидкості від часу отримаємо із урахуванням (22) :

$$\boldsymbol{v = e^{-70t}} \qquad (25).$$

Інтерес викликає задача на використання умов рівноваги фізичного тіла : на горизонтальній поверхні лежить однорідний стрижень довжиною $\boldsymbol{L}$ масою $\boldsymbol{m}$. Визначити мінімальне значення горизонтальної сили, що треба прикласти до кінця стрижня перпендикулярно до нього, щоб прокрутити стрижень у горизон-тальній площині. Коефіцієнт тертя ковзання стрижня по площині дорівнює $\boldsymbol{\mu}$.

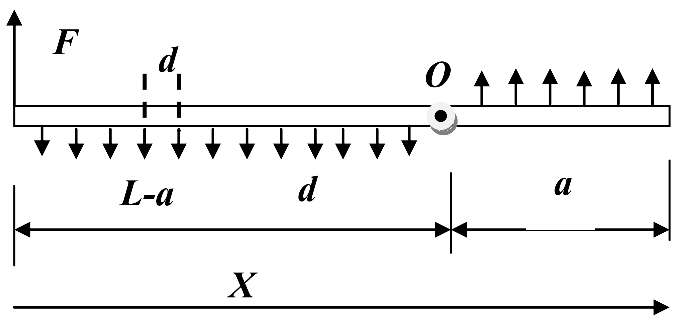


Рис.4. Розподіл сил вздовж горизонтального стрижня.

Припустимо, що обертання стрижня відбудеться навколо точки $\boldsymbol{O}$, що розподіляє стрижень на частини $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{L\text{-}a}$ (див.Рис.4). Стрижень почне рівномірне прокручування після досягнення сили $\boldsymbol{F}$ відповідного значення. При цьому, сили і моменти сил, що діють на стрижень, мають бути скомпенсовані у горизонтальній та вертикальній площинах. У вертикальній площині скомпенсованими є сили тяжіння $\boldsymbol{mg}$ та реакції опори $\boldsymbol{N}$, що діють на стрижень. У горизонтальній площині на стрижень діють сили тертя – ковзання $\boldsymbol{\mu N}$ і $\boldsymbol{F}$. Оскільки при обертанні стрижня його частини $\boldsymbol{dx}$ мають різницю у траєкторіях руху, то загальна сила тертя $\boldsymbol{\mu N}$ буде складатися із додатку сил тертя $\boldsymbol{df}$, що діють на окремі елементи $\boldsymbol{dx}$ із масами $\boldsymbol{dm}$. Для розрахунку сили тертя $\boldsymbol{df}$ можна отримати вираз:

$$\boldsymbol{df = \mu g dm = \mu g S \rho dx} \qquad (26),$$

де $\boldsymbol{S}$ – площа перерізу стрижню, $\boldsymbol{\rho}$ – густина його речовини.

Умови рівномірного обертання стрижня у горизонтальній площині навколо вісі, що проходить вертикально через точку $\boldsymbol{O}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F + \int_0^a df = \int_0^{L-a} df} \\ \boldsymbol{F(L-a) = \int_0^a xdf + \int_0^{L-a} xdf} \end{cases} \qquad (27).$$

Рівняння системи (27) відповідають балансу сил та моментів сил, що діють на стрижень. Для спрощення розгляду такої системи можна позначити коефіцієнтом $\boldsymbol{\kappa}$ добуток $\boldsymbol{\mu g S \rho}$. Система рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F + \kappa\int_0^a dx = \kappa\int_0^{L-a} dx} \\ \boldsymbol{F(L-a) = \kappa\int_0^a xdx + \kappa\int_0^{L-a} xdx} \end{cases} \qquad (28).$$

Виконавши обчислення, можна отримати значення $\boldsymbol{a}$ та сили $\boldsymbol{F}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = L \mp \frac{L}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{F = \kappa L(\sqrt{2}-1) = \mu m g(\sqrt{2}-1)} \end{cases} \qquad (29).$$

Значення $\boldsymbol{a}$ задовольнить тільки знак «мінус», оскільки $\boldsymbol{a}$ – частина стрижня довжиною $\boldsymbol{L}$.

Де – кілька способів рішення має задача з розділу «Механічні коливання»: визначити період коливань дерев’яної циліндричної колоди висотою $\boldsymbol{H}$, що пла-ває у воді, які виникають після її вертикального занурення на невелику глиби-ну $\boldsymbol{x}$. Маса колоди $\boldsymbol{m}$, густина дерева $\boldsymbol{\rho_д}$, густина води $\boldsymbol{\rho}$.

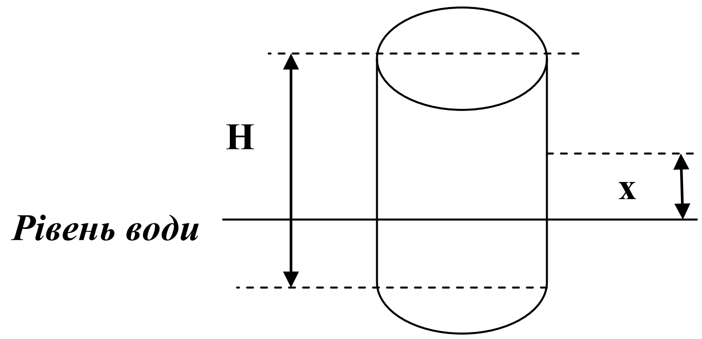


Рис.5. Плавуча колода перед зануренням.

Автор розгляне спосіб рішення, де використовується метод математичного аналізу. Занурену на глибину $\boldsymbol{x}$ колоду, що зображена на рис.5, можна розгляну-ти у якості важка, що розміщений на розтягнутій пружині. Сила пружності створюється силою Архімеда, що діє на колоду вертикально вгору. У разі нехтування силами спротиву, вільні коливання відбуваються із збереженням механічної енергії системи :

$$\frac{mv^2}{2} + \kappa\frac{x^2}{2} = const \qquad (30),$$

де v – швидкість руху колоди при коливаннях.

Значення коефіцієнту жорсткості κ можна визначити через потенційну енергію, що виникає у разі дії сили Архімеда, що залежить від зміщення x :

$$\kappa\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\rho Sxgx = \rho Sg\frac{x^2}{2} \qquad (31),$$

де S – площа перерізу колоди.

Похідна виразу (30) за часом, вважаючи $\dot{x} = v$, має вигляд:

$$\frac{m}{2}2\ddot{x}\dot{x} + \frac{\kappa}{2}2\dot{x}x = 0 \qquad (32).$$

Із виразу (32) можна отримати рівняння вільних коливань:

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x \qquad (33).$$

Вважаючи $w = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, можна отримати вираз для періоду коливань:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\partial SH}{\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\partial H}{\rho g}} \qquad (34).$$

Схожим чином можна розв'язати задачу на пошук періоду коливань фізичного тіла з масою m, що кинуте у тунель, який уявно пронизує Землю наскрізь (див. Рис.6.).

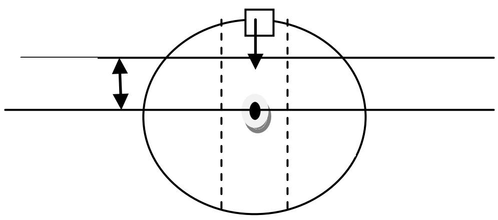


Рис.6. Схема руху тіла у тунелі.

Сила тяжіння, що діє на тіло на відстані x від центру Землі O, визначається законом всесвітнього тяжіння :

$$F = mG\frac{4}{3}\pi\rho x^3\frac{1}{x^2} = mG\frac{4}{3}\pi\rho x \qquad (35),$$

де $\boldsymbol{G}$ – гравітаційна стала, $\boldsymbol{\rho}$ – середня густина планети.

Потенціальна енергія тіла буде визначатися із урахуванням залежності сили тяжіння від значення $\boldsymbol{x}$:

$$\kappa\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}mG\frac{4}{3}\pi\rho\, x^2 \qquad (36).$$

Похідна закону збереження енергії (31) для руху тіла у тунелі дає вираз (33) у вигляді:

$$\ddot{x} = -\frac{mG\frac{4}{3}\pi\rho}{m}\,x = -\,G\frac{4}{3}\pi\rho\, x \qquad (37).$$

Період коливань фізичного тіла у тунелі буде розраховано за виразом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\,\pi\rho}} \qquad (38).$$

Після підстановки відомих довідникових значень $\boldsymbol{T \approx 90}$ ***хв.***

ВИСНОВКИ

Якість шкільної фізичної освіти – актуальніше питання сьогодення, основа виховання спеціалістів із сучасною технологічною освітою. Мірою якості знань є практичне уміння та стійкі навички учнів щодо оволодіння методикою розв’язування фізичних задач. Методи математичного аналізу – найбільш універсальні і творчі методи. Для оволодіння їми учням і студентам потрібен тривалий час. Тому основи інтегрального та диференціального методів повинні впроваджуватись у програмі шкільної фізичної освіти. Ефективність такого впровадження досліджена автором із використанням системи критеріїв ефективності застосування методики – значення критеріїв зростають у середньому у півтора рази. Впродовж досліджень автором відокремлені основні методичні аспекти, що впливають на ефективність впровадження. А саме, учням треба на прикладах довести, що методи мають універсальний характер, винятковість у окремих типах завдань, схематичну тривіальність застосування, спорідненість із методами елементарної фізики та алгебри, базуються на використанні фізичних законів та визначень, являються якісно новою сходинкою у загальному умінні розв’язування фізичних задач. Результатом впровадження методів матаналізу у курсі фізики середньої школи стане якісний рівень підготовки абітурієнтів, що обирають технічні спеціальності у ВНЗ, спрощення процесу прийняття рішення про власний шлях подальшої освіти.